Téma : Skalární a vektorové veličiny

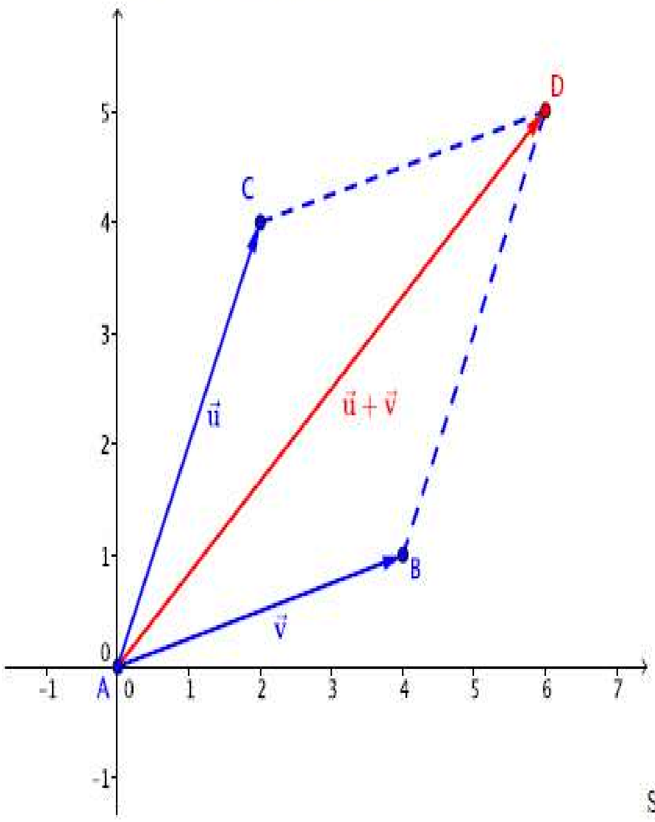
Skalární fyzikální veličiny jsou zcela určeny číselnou hodnotou a jednotkou (délka, čas, hustota teplota, práce……).

Vektorové fyzikální veličiny , k určení těchto veličin je potřeba znát nejen jejich číselnou hodnotu a měřící jednotku, ale i směr. Vektor označujeme zpravidla šipkou $\vec{F}$ (v tisku obvykle tučným písmem). Příkladem vektorových veličin jsou : rychlost, zrychlení, síla, moment síly, magnetická indukce ……….

Pravidla pro počítání s vektory (v rovině)

a) Vektorový součet - graficky skládání vektorů

Chceme-li sečíst dva vektory, zobrazíme je do počátku souřadnicového systému a následně doplníme na kosodélník a uhlopříčka začínající v počátku bude výsledný vektor. Samozřejmě je připraven ilustrativní obrázek:



Součet dvou vektorů $u + v$

Analyticky je pak součet vektorů součet příslušných souřadnic. Takže pokud máte dva vektory $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ a $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, pak součet $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ je roven

$$\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$$

Pro ty vektory na obrázku platí: $\vec{\mathbf{u}} = (2, 4)$ a $\vec{\mathbf{v}} = (4, 1)$. Součet pak vypadá takto: $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = (2 + 4, 4 + 1) = (6, 5)$. Tyto souřadnice odpovídají bodu *D*.

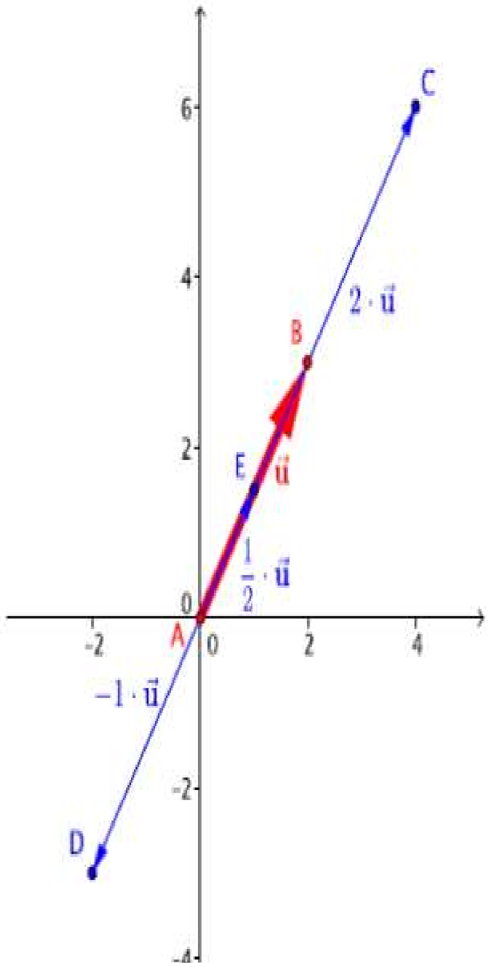
b) Vektorový rozdíl

Pokud odečítáte vektory, je to stejné, jako byste přičítali opačný vektor. Analyticky:

$$\vec{\mathbf{u}} - \vec{\mathbf{v}} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2)$$

c) Násobení vektoru číslem

Pokud vynásobíte vektor reálným číslem k, pak jen vynásobíte číslem k obě jeho souřadnice. V geometrické interpretaci se to projeví „natažením“ nebo „zmenšením“ vektoru, případně převrácením, pokud je k záporné.

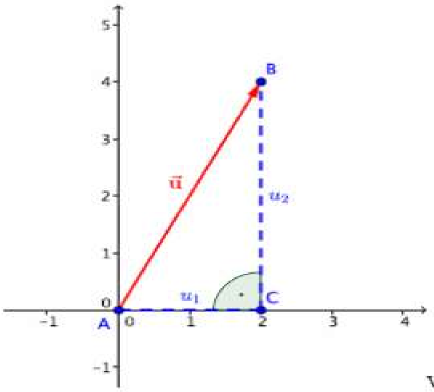


d) Absolutní hodnota – velikost vektoru

Když už známe souřadnice vektorů, můžeme snadno vypočíst jejich velikost. Podle Pythagorovy věty docela snadno odvodíme, že velikost vektoru o souřadnicích $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ v rovině je

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Na následujícím obrázku vidíme, že souřadnice vektoru se shodují s délkami stran námi vytvořeného trojúhelníku a že po aplikování Pythagorovy věty opravdu lehce spočteme velikost vektoru.



Velikost vektoru

Máme-li vektor $\vec{\mathbf{u}} = (2, 4)$, jeho velikost bude

$$|\vec{\mathbf{u}}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$$

e) Skalární součin vektorů

Skalární součin se definuje mezi dvěma vektory a zachycuje vztah mezi velikosti vektorů a jejich úhlem.

Skalární součin

Skalární součin definujeme mezi dvěma vektory. Značíme ho jako běžný součin, středovou tečku: $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$. Výsledkem skalárního součinu je reálné číslo, není to vektor. Máme-li dva vektory $\vec{\mathbf{u}} = (u_1, u_2)$ a $\vec{\mathbf{v}} = (v_1, v_2)$, pak jejich skalární součin je roven:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Pokud je alespoň jeden z vektorů $\vec{\mathbf{u}}$ a $\vec{\mathbf{v}}$ nulový, definujeme jejich součin takto:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$$

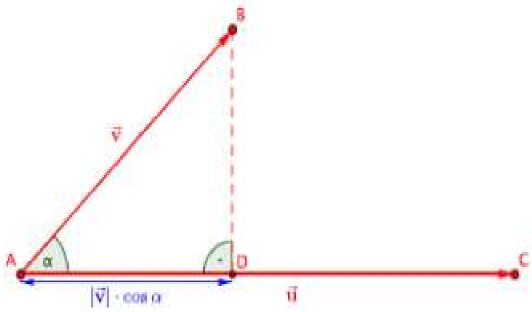
Jaký je geometrický význam skalárního součinu? Pro skalární součin dvou vektorů zároveň platí

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| \cdot \cos\alpha,$$

kde α představuje velikost úhlů těchto vektorů. Tento vzorec nám dává jednoduchý způsob jak zjistit velikost úhlu dvou vektorů. Pokud z tohoto vzorce osamostatníme cosinus, získáme vzorec:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}}{|\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}|} = \frac{u_1 v_1 + u_2 v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

Vzorec platí v rovině. Pokud se pohybujeme v prostoru, musíme přidat ještě jednu dimenzi. V tuto chvíli už můžeme nakreslit geometrický význam skalárního součinu.



f) Vektorový součin

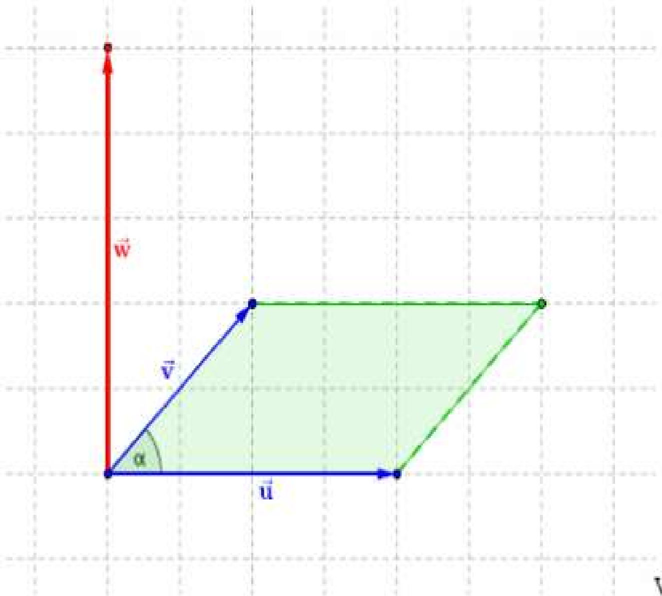
Vektorový součin je operace v prostou mezi dvěma vektory, která nám vrátí nový vektor, který je na tyto dva vektory kolmý.

Co je to vektorový součin

Vektorový součin je definován mezi dvěma vektory a pouze v prostoru. Výsledkem vektorového součinu, na rozdíl od skalárního součinu, je opět vektor. Výsledkem vektorového součinu vektorů $\vec{\mathbf{u}}$ a $\vec{\mathbf{v}}$ je vektor $\vec{\mathbf{w}}$, který má tyto vlastnosti:

$$|\vec{\mathbf{w}}| = |\vec{\mathbf{u}}| \cdot |\vec{\mathbf{v}}| \cdot \sin \alpha,$$

kde α je úhel mezi vektory $\vec{\mathbf{u}}$ a $\vec{\mathbf{v}}$. Dále je vektor $\vec{\mathbf{w}}$ je kolmý k oběma vektorům $\vec{\mathbf{u}}$ a $\vec{\mathbf{v}}$. Výsledný směr se pak řídí pravidlem pravé ruky. Abychom odlišili vektorový součin od skalárního, používáme u vektorového znaménko $\times$: $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$.

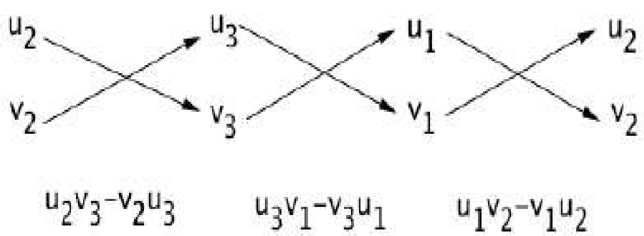


Vektorový součin $\vec{\mathbf{u}} \times \vec{\mathbf{v}}$

Prozatím umíme spočítat velikost výsledného vektoru a směr. Praktičtější ovšem je, znát přímo souřadnice takového vektoru. Samotný vzorec vypadá takto:

$$u \times v = (u_2 v_3 - v_2 u_3, u_3 v_1 - v_3 u_1, u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

Tenhle vzorec se pamatuje celkem těžko, proto existuje pomůcka, jak si ho zapamatovat:

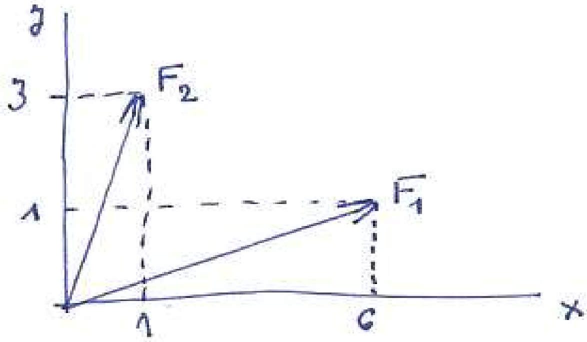


Pomůcka pro vektorový součin

Fyzikální aplikace počítání s vektory

a) Výslednice sil
b) Výpočet mechanické práce W = $\vec{F}.\vec{s}$ ……..skalární součin
c) Výpočet momentu sil $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ …….. vektorový součin

Př. 1 Vypočtete výslednici sil dle obr.



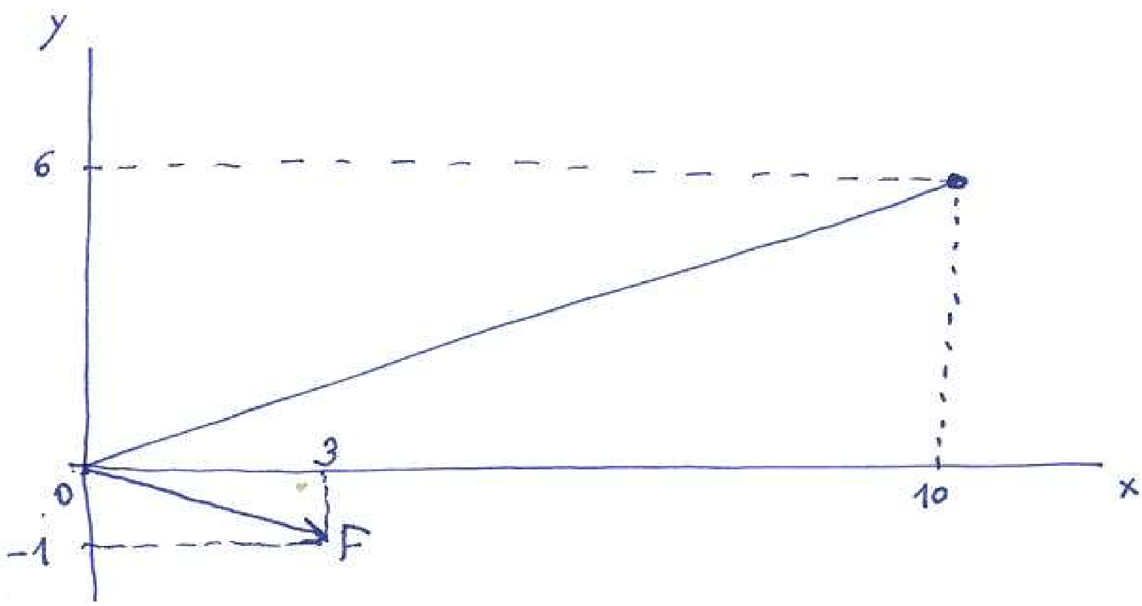
$\vec{F_1}\ (6;1)$ $\vec{F_2}\ (1;3)$

$\vec{F_v} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (7;4)$

$|\vec{F_v}| = \sqrt{7^2+4^2} = \sqrt{65} = \underline{\underline{8{,}06\ N}}$

Př. 2

Jak velkou práci vykoná síla dle obr.



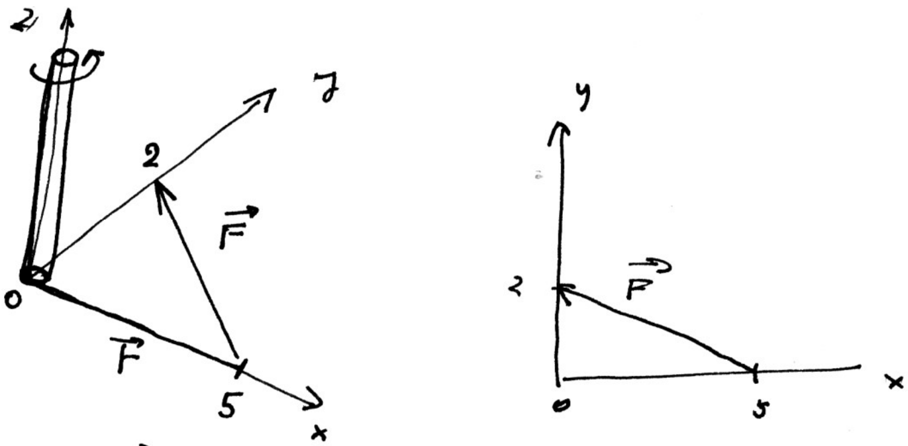
$\vec{s}\,(10;\,6)$

$\vec{F}\,(3;\,-1)$

$W = \vec{F}\cdot\vec{s} = (3;-1)(10;6)$

$W = 30 - 6 = \underline{\underline{24\ \mathrm{J}}}$

<u>Př. 3</u> Vypočtěte moment síly k ose otáčení



$\vec{r}\,(5;\,0;\,0)$

$\vec{F}\,(-5;\,2;\,0)$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

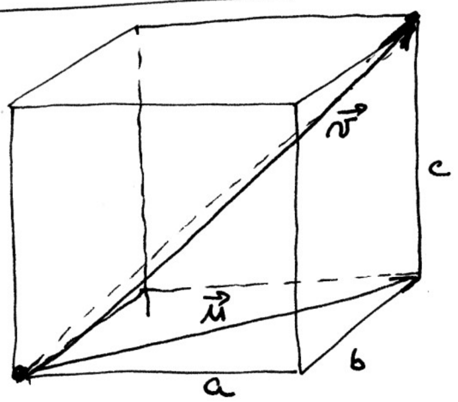
$$\begin{matrix} 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & -5 & 2 \end{matrix}$$

$$\underbrace{0 \cdot 0 - 2 \cdot 0}_{0} \qquad \underbrace{0 \cdot -5 - 0 \cdot 5}_{0} \qquad \underbrace{5 \cdot 2 - (-5) \cdot 0}_{10}$$

$$\vec{M}\ (0;\ 0;\ 10)$$

$$|M| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 10^2} = \underline{\underline{10\ Nm}}$$

<u>Poznámka:</u>



$$|\vec{u}|^2 = a^2 + b^2$$

$$|\vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + c^2$$

$$\vec{v} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

KINEMATIKA HMOTNÉHO BODU

Mechanický pohyb – forma pohybu, která nastává při přemísťování tělesa, nebo jeho částí, vzhledem k okolním tělesům.

Kinematika se zabývá popisem pohybu těles i tříděním a pozorováním pohybů, aniž by zkoumala, proč pohyb nastává.

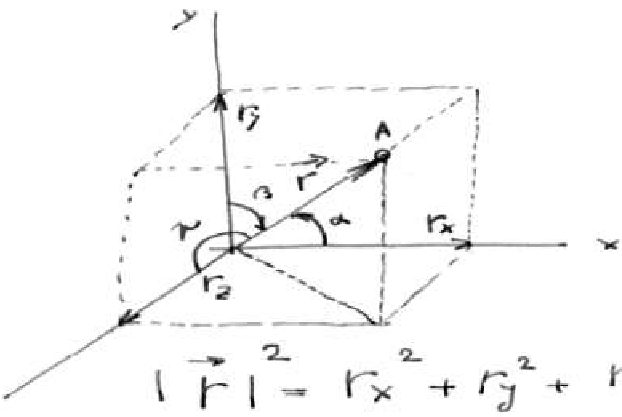
Hmotný bod je myšlenkový model tělesa. Bodový objekt, jehož hmotnost je stejná, jako hmotnost tělesa.

Vztažná soustava , soustava těles, ke kterým vztahujeme pohyb nebo klid sledovaného tělesa.

Poloha hmotného bodu , obvykle určujeme pomocí pravoúhle soustavy souřadnic ,kterou spojujeme se vztažnou soustavou. Polohu lze určit také polohovým vektorem.

Polohový vektor , orientovaná úsečka, jejíž počátek leží v počátku souřadnicového systému a koncovým bodem je sledovaný hmotný bod.

- Vektor jako orientovaná úsečka, znázornění, skládání, rozklad do směrů
- Zápis souřadnic vektoru, absolutní hodnota vektoru, směrové kosiny



$$|\vec r|^2 = r_x^2 + r_y^2 + r_z^2$$

$$r_x = |r| \cos\alpha$$

$$r_y = |r| \cdot \cos\beta$$

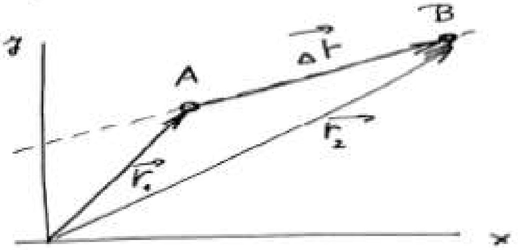
$$r_z = |r| \cdot \cos\gamma$$

$$|r|^2 = |r|^2 \cdot (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

Platí:

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

- Popis pohybu vektorem



$$\boxed{\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + \Delta\vec{r}}$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_2 - \Delta\vec{r}$$

Dáno:

$\vec{r}_1 \ (3; 5)$ $\qquad \Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

$\vec{r}_2 \ (10; 8)$ $\qquad \Delta\vec{r} = (10; 8) - (3; 5)$

$\Delta t = 5 s$ $\qquad \Delta\vec{r} = (7; 3)$

$$|\Delta\vec{r}| = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58} \doteq 7,61 m$$

$$|\vec{v}| = \frac{7,61}{5} = 1,522 \frac{m}{s}$$

Nebo: $\vec{v} = \left(\frac{7}{5}; \frac{3}{5}\right) = (1,4; 0,6)$

Kontrola: $\sqrt{1,4^2 + 0,6^2} = 1,52 \frac{m}{s}$

Trajektorie – souhrn všech poloh, kterými hmotný bod postupně prochází. Podle tvaru trajektorie rozlišujeme pohyby **přímočaré a křivočaré.**

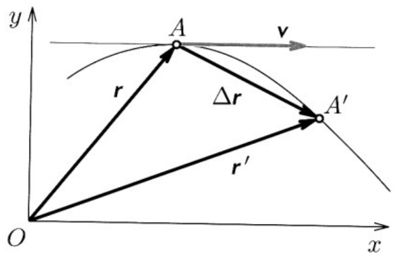
Dráha hmotného bodu je délka trajektorie, kterou hmotný bod opíše za určitou dobu.

Průměrná rychlost je **skalár** , který definujeme jako podíl dráhy **s** a doby **t** , za kterou hmotný bod tuto dráhu urazí.

Druhy pohybů

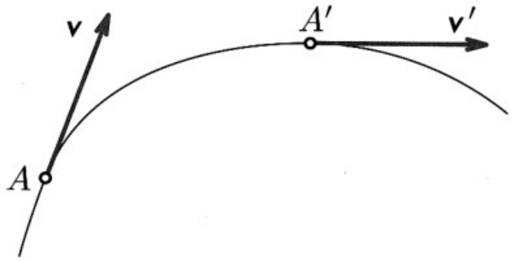
Okamžitá rychlost je vektor, velikost okamžité rychlosti získáme jako průměrnou rychlost ve velmi malém časovém intervalu a na velmi malém úseku trajektorie.

Průměrná rychlost :



$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t},$$

Okamžitá rychlost :



$$\vec{v} \equiv \lim_{t\to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \equiv \dot{\mathbf{r}}$$

Zrychlení $\vec{\boldsymbol{a}}$ $\left[\frac{m}{s^2}\right]$ je vektor, který se týká časové změny vektoru rychlosti.

Druhy pohybů

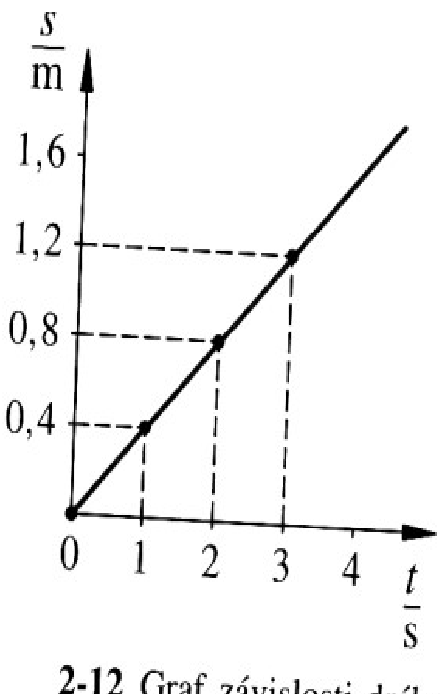
- Rovnoměrný přímočarý pohyb
- Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb
- Rovnoměrně zpomalený přímočarý pohyb
- ……………. pohyb po kružnici
- ……………. křivočarý pohyb
- Obecný pohyb

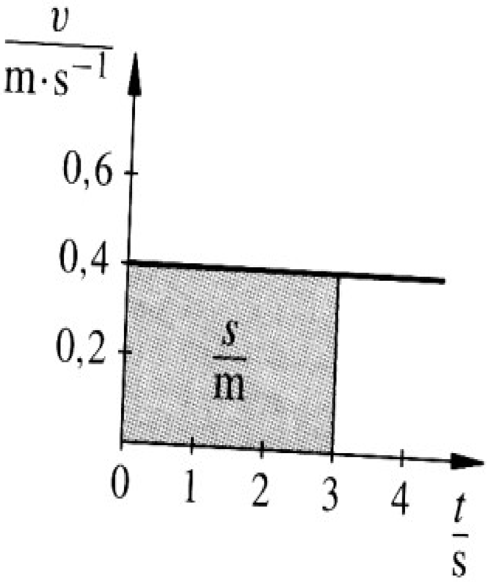
Rovnoměrný přímočarý pohyb

Charakteristiky : $v = kons. \to v_p = v \to a = 0\,\frac{m}{s^2}$

Rychlost tedy vypočteme jako podíl ujeté dráhy a času :

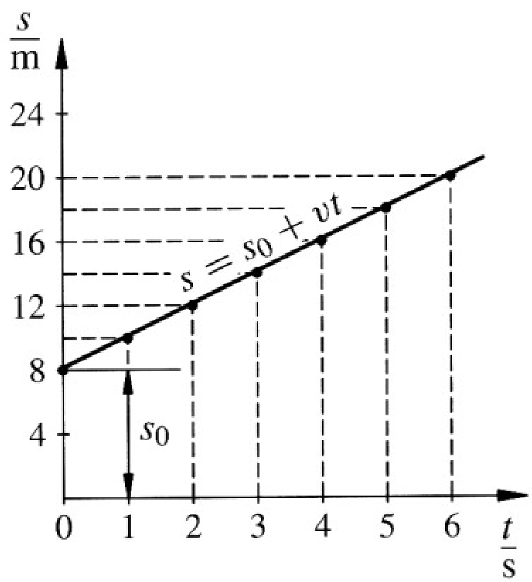
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$





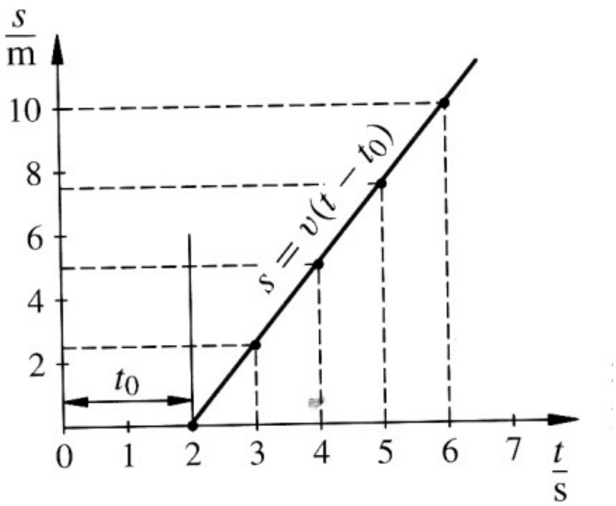
Pokud v čase t=0s, byla již ujeta dráha s_0, Pak platí :

$s = s_0 + vt$



V případě, že se těleso pohybuje po zvolené dráze později, než od kdy měříme čas :

$s = v(t - t_0)$



Př. 1

Turista šel 2 hodiny po rovině rychlostí 6 km · h^{-1}, další hodinu vystupoval do prudkého kopce rychlostí 3 km · h^{-1}. Jaká byla jeho průměrná rychlost?

t_1 = 2 h, v_1 = 6 km · h^{-1}, t_2 = 1 h, v_2 = 3 km · h^{-1}; v_p = ?

$$v_p = \frac{v_1 t_1 + v_2 t_2}{t_1 + t_2} = 5\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Př. 2

Dva chlapci trénují běh na uzavřené dráze délky 400 m. Oba vyběhnou současně z téže startovní čáry týmž směrem. Chlapec A běží stálou rychlostí 5 m · s^{-1}, chlapec B stálou rychlostí 3 m · s^{-1}. Za jakou dobu chlapec A doběhne poprvé chlapce B? Jaké vzdálenosti za tuto dobu chlapci uběhnou?

l = 400 m, v_A = 5 m · s^{-1}, v_B = 3 m · s^{-1}; t = ?, s_A = ?, s_B = ?

$$t = \frac{l}{v_A - v_B} = 200\,\mathrm{s} = 3\,\mathrm{min}\,20\,\mathrm{s}$$

$$s_A = v_A t = 1\,000\,\mathrm{m}$$

$$s_B = v_B t = 600\,\mathrm{m}$$

Př. 3

Veslice plující po řece urazila vzdálenost 120 m při plavbě po proudu za 12 s, při plavbě proti proudu za 24 s. Určete velikost rychlosti veslice vzhledem k vodě a velikost rychlosti proudu v řece. Obě rychlosti jsou konstantní.

s = 120 m, t_1 = 12 s, t_2 = 24 s; v_1 = ?, v_2 = ?

$v_1 + v_2 = \frac{s}{t_1}$, $v_1 - v_2 = \frac{s}{t_2}$. Sečtením těchto rovnic dostaneme

$2v_1 = \frac{s}{t_1} + \frac{s}{t_2}$, po úpravě $v_1 = \frac{s(t_1 + t_2)}{2t_1 t_2} = 7{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$,

odečtením rovnic dostaneme $2v_2 = \frac{s}{t_1} - \frac{s}{t_2}$ a po úpravě

$v_2 = \frac{s(t_2 - t_1)}{2t_1 t_2} = 2{,}5\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

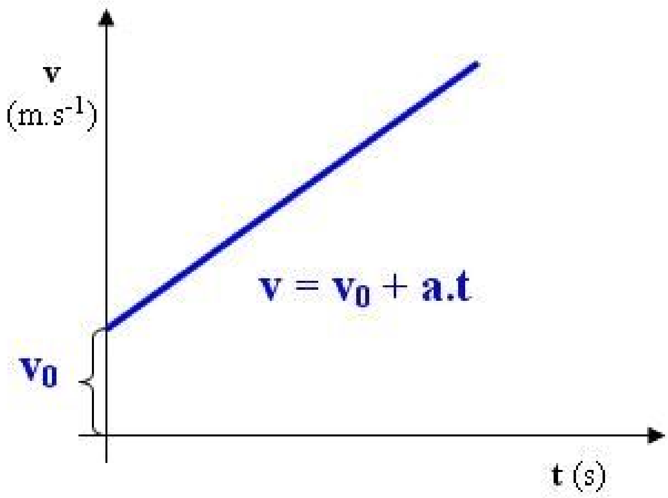
Rovnoměrně zrychlený přímočarý pohyb

Platí : a = konst.

Ze vztahu pro zrychlení : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - t_0}$, budeme-li předpokládat, že počáteční čas t_0 = 0s, vyjádříme rychlost ve tvaru

$$\boxed{\boldsymbol{v = v_0 + at}}$$

v ………….. okamžitá rychlost ($m.s^{-1}$)
v_0 ………….. počáteční rychlost ($m.s^{-1}$)



<u>Dráha rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu</u>

Průměrná rychlost (mezi konečnou v čase t a počáteční)

$$\overline{v} = \frac{v_0 + at + v_0}{2}$$

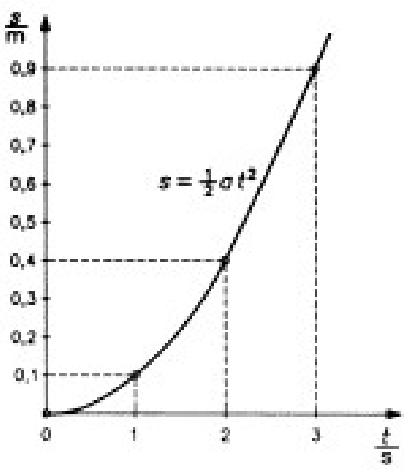
Výpočet dráhy z průměrné rychlosti : $s = \overline{v} * t$

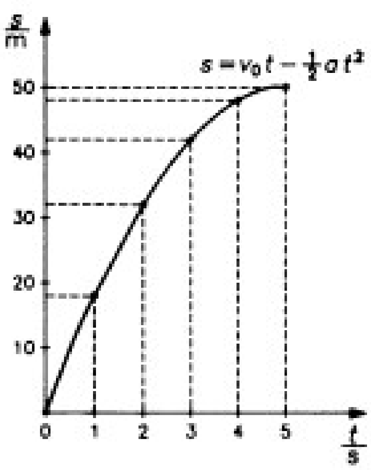
Pro dráhu rovnoměrně zrychleného přímočarého pohybu, při počáteční dráze s_0 tedy platí :

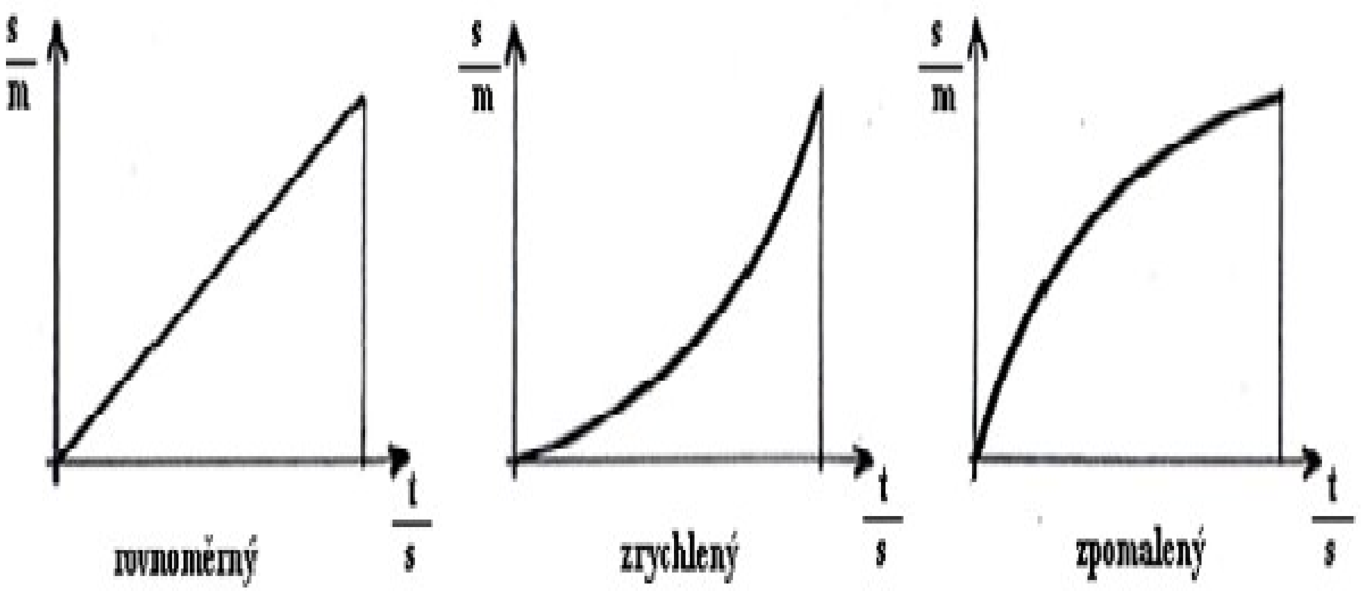
$$\boxed{\boldsymbol{s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2}}$$

Poznámka :

Pro zpoždění má hodnota zrychlení zápornou hodnotu.







Příklad :

Na silnici s maximální dovolenou rychlostí 60 km · h^{-1} došlo k havárii automobilu. Z délky brzdné stopy automobilu, která byla 40 m, policie zjišťovala, zda řidič tuto rychlost nepřekročil. Jaký závěr policie učinila, předpokládáme-li rovnoměrně zpomalený pohyb vozidla se zrychlením o velikosti 5 m · s^{-2}?

v_{dov} = 60 km · h^{-1} = 16,7 m · s^{-1}, s = 40 m, a = 5 m · s^{-2}; v_0 = ?

$$v_0 = \sqrt{2sa} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

$$v_0 - v_{dov} = 12\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}$$

Automobil překročil dovolenou rychlost o 12 km · h^{-1}.

Rovnoměrně zrychlený pohyb – příklady

Př. 1 :

Kulička, kterou položíme na nakloněnou rovinu, se začne pohybovat a za dobu 5 s dosáhne rychlosti 1 m · s^{-1}. Za předpokladu, že pohyb kuličky je rovnoměrně zrychlený, určete velikost jejího zrychlení a dráhu, kterou za uvedenou dobu urazí.

t = 5 s, v = 1 m · s^{-1}; a = ?, s = ?

$$a = \frac{v}{t} = 0{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = 2{,}5\ \mathrm{m}$$

Př. 2 :

Automobil, který jel rychlostí 54 km · h^{-1}, zvýšil rychlost na 90 km · h^{-1}, přičemž ujel při stálém zrychlení dráhu 200 m. Určete velikost zrychlení automobilu.

v_1 = 54 km · h^{-1} = 15 m · s^{-1}, v_2 = 90 km · h^{-1} = 25 m · s^{-1}, s = 200 m; a = ?

$$s = v_1 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$t = \frac{v_2 - v_1}{a}$$

Po dosazení a úpravě dostaneme pro dráhu vztah

$$s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a},$$

odtud zrychlení

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} = 1\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Př. 3 :

Střela opouští dělovou hlaveň o délce 3 m okamžitou rychlostí 600 m · s^{-1}. Za jakou dobu a s jak velkým zrychlením proběhne střela hlavní, je-li její pohyb rovnoměrně zrychlený?

d = 3 m, v = 600 m · s^{-1}; t = ?, a = ?

$$d = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt \Rightarrow t = \frac{2d}{v} = 0{,}01\,\mathrm{s}$$

$$a = \frac{v}{t} = 60\,000\,\mathrm{m \cdot s^{-2}} = 60\,\mathrm{km \cdot s^{-2}}$$

Př. : 4

Dvě tělesa ze začnou současně pohybovat z téhož místa ve stejném směru. První těleso koná pohyb rovnoměrně zrychlený s počáteční rychlostí 4 m · s^{-1} a se zrychlením 0,5 m · s^{-2}, druhé těleso pohyb rovnoměrně zpomalený s počáteční rychlostí 10 m · s^{-1} a se zrychlením 1 m · s^{-2}. Určete a) dobu, za kterou budou mít obě tělesa stejnou rychlost, a velikost této rychlosti, b) dobu, za kterou urazí obě tělesa stejnou dráhu, a tuto dráhu.

v_{01} = 4 m · s^{-1}, a_1 = 0,5 m · s^{-2}, v_{02} = 10 m · s^{-1}, a_2 = 1 m · s^{-2}; a) t_1 = ?, v = ?, b) t_2 = ?, s = ?

a) $v_{01} + a_1 t_1 = v_{02} - a_2 t_1$

Odtud $t_1 = \dfrac{v_{02} - v_{01}}{a_1 + a_2} = 4\,\mathrm{s}$, $v = v_{01} + a_1 t_1 = v_{02} - a_2 t_2 = 6\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

b) $v_{01} t_2 + \dfrac{1}{2} a_1 t_2^2 = v_{02} t_2 - \dfrac{1}{2} a_2 t_2^2$

Tato kvadratická rovnice má dva kořeny.

1. t_2 = 0, což odpovídá počáteční poloze těles,

2. $t_2 = \dfrac{2(v_{02} - v_{01})}{a_1 + a_2} = 8\,\mathrm{s}$, což je hledaná doba.

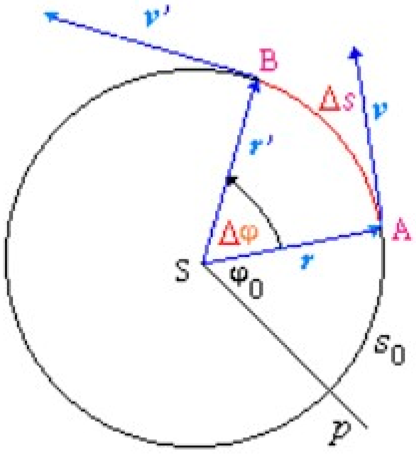
Dráha, kterou obě tělesa za tuto dobu urazí, je

$$s = v_{01} t_2 + \frac{1}{2} a_1 t_2^2 = v_{02} t_2 - \frac{1}{2} a_2 t_2^2 = 48\,\mathrm{m}.$$

Rovnoměrný pohyb po kružnici

charakteristiky : v = konst. ; a_t ve směru okamžité rychlosti = 0 m.s^{-2}

Trajektorií pohybu je kružnice, pokud budeme sledovat pohyb pomocí polohového vektoru, pak dostáváme :



Za určitý čas Δt opíše polohový vektor $\vec{r}$ úhel $\Delta\varphi$, což odpovídá délce oblouku Δs.

Protože rychlost po obvodu je konstantní (rovnoměrný pohyb), musí být i úhlová rychlost konstantní a pro její velikost platí :

$$\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

$$\left[\frac{rad}{s}\right]$$

Jedná se o pohyb **periodický** , tedy po určité době se znovu opakuje. Dobu, za kterou se pohyb opakuje nazýváme **perioda a značíme T [s].**

Za dobu jedné periody T opíše polohový vektor úhel 2π. Tedy musí platit :

$$\boldsymbol{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Frekvence popisuje, kolikrát za sekundu se daný „jev“ opakuje. Tedy, kolikrát se zopakuje perioda během jedné sekundy :

$$\boldsymbol{f = \frac{1}{T}} \quad [\mathrm{Hz}]$$

Samozřejmě tedy musí platit : $\boldsymbol{\omega = 2\pi f}$

Vztah mezi obvodovou a úhlovou rychlostí :

Z definice úhlu měřeného v radiánech platí, že: $\Delta s = r.\Delta\varphi$

Pokud rovnici vydělíme časem, pak dostáváme vztah mezi **obvodovou rychlostí v a úhlovou rychlostí ω** .

$$\boldsymbol{v = \omega . r}$$

Př.

Hmotný bod se pohybuje rovnoměrně po kruhové dráze o poloměru 0,5m tak, že za minutu vykoná 20 oběhů. Vypočtěte úhlovou a obvodovou rychlost, frekvenci a periodu pohybu.

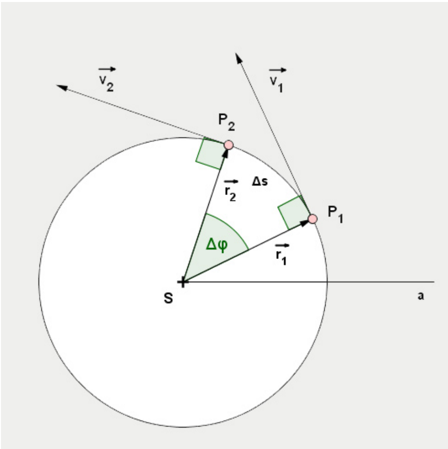
Zrychlení při rovnoměrném pohybu po kružnici

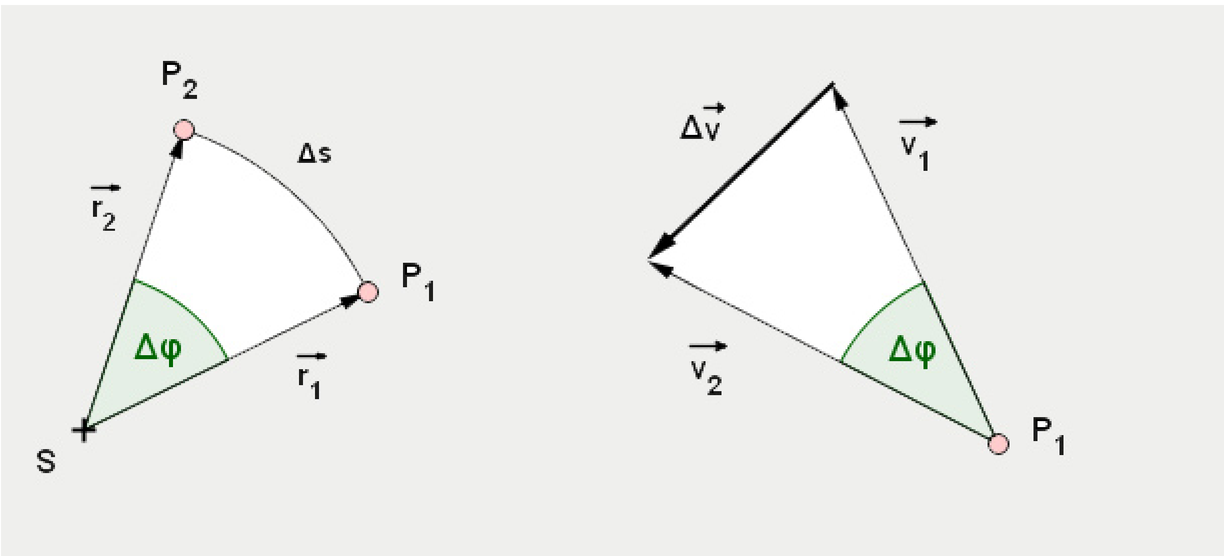
Proč se vlastně těleso po kruhové dráze pohybuje ?

- Je něčím přitahováno směrem do středu
- Existuje síla, které těleso na kruhové dráze „drží“

Ze zmíněných předpokladů lze usuzovat, že existuje zrychlení směrem do středu kružnice i ve chvíli, kdy pohyb je rovnoměrný.

Ze vzorce $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$, lze nesprávně předpokládat, že při nulové změně délky vektoru rychlosti musí být nulová i velikost zrychlení. Uvědomme se ale , že okamžitá rychlost je vektorovou veličinou a kromě délky je vektor určen také směrem. **Ke změně vektoru dochází, na kruhové dráze se mění jeho směr.**





Z podobnosti trojúhelníků vyplývá :

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta s}{r}$$

Odsud získáváme : $\Delta v = v * \frac{\Delta s}{r}$

Při znalosti vztahu : $|a| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} \rightarrow |a| = \frac{\Delta s}{\Delta t} * \frac{v}{r}$

Získáváme vztah : $\boxed{a = \frac{v^2}{r}}$ $\boxed{a = \omega^2 * r}$

<u>Zrychlení při nerovnoměrném křivočarém pohybu</u>

Mimo dostředivé zrychlení a_n máme ještě tečné zrychlení k trajektorii pohybu a_t. Celkové výsledné zrychlení získáme složením obou dvou složek.

Kruhový pohyb – příklady

Př. 1

Hmotný bod koná rovnoměrný pohyb po kružnici s oběžnou dobou 5 s. Určete jeho frekvenci a úhlovou rychlost.

$$f = \frac{1}{T} = 0{,}2\ \mathrm{Hz}$$
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1{,}3\ \mathrm{rad \cdot s^{-1}}$$

Př. 2

Vrtule letadla se otáčí úhlovou rychlostí 200 rad · s^{-1}. a) Jak velkou rychlostí se pohybují body na koncích vrtule, jejichž vzdálenost od osy je 1,5 m? b) Jakou dráhu uletí letadlo během jedné otočky vrtule, letí-li rychlostí 540 km · h^{-1}?

a) $v = r\omega = 300\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

b) $s = vT = v\dfrac{2\pi}{\omega} = 4{,}7\ \mathrm{m}$

Př. 3

Automobil projíždí zatáčkou o poloměru 50 m rychlostí o stálé velikosti 36 km · h^{-1}. Jak velké je normálové zrychlení automobilu v zatáčce?

$$a_n = \frac{v^2}{r} = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$

Př. 4

Setrvačník koná 450 otáček za minutu. Určete velikost normálového zrychlení bodů setrvačníku, které jsou ve vzdálenosti 10 cm od osy otáčení. Kolikrát se zvětší velikost zrychlení těchto bodů, zvětší-li se počet otáček na dvojnásobek?

$a_1 = 220\ \mathrm{m \cdot s^{-2}}$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{f_2^2}{f_1^2} = 4$$

DYNAMIKA

Newtonovy pohybové zákony

Účinky síly

- pohybové – mají za následek změnu pohybového stavu tělesa.
- deformační – mají za následek změnu tvaru tělesa, změnu vnitřních sil tělesa.

Síla je vzájemné působení těles a to buď vzájemným dotykem a nebo interakcí silových polí těles.

První Newtonův zákon :

Každé těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud není nuceno vnějšími silami tento stav změnit. (zákon setrvačnosti)

Hybnost

Vyjadřuje pohybový stav tělesa. Je vektorovou veličinou definovanou jako součin hmotnosti a vektoru okamžité rychlosti.

$$\boldsymbol{\vec{p} = m.\vec{v}}$$

Druhý Newtonův zákon

Časová změna hybnosti je přímo úměrná působící síle. (zákon síly)

$$F = k * \frac{\Delta p}{\Delta t}$$

$$F = k * \frac{\Delta(m * v)}{\Delta t}$$

$$F = k * \frac{\Delta m * v + m * \Delta v}{\Delta t}$$

Při konstantní hmotnosti $\Delta m = 0$ a vhodně zvolených jednotkách k=1.

$$F = \frac{m * \Delta v}{\Delta t}$$

$$\boldsymbol{F = m * a}$$

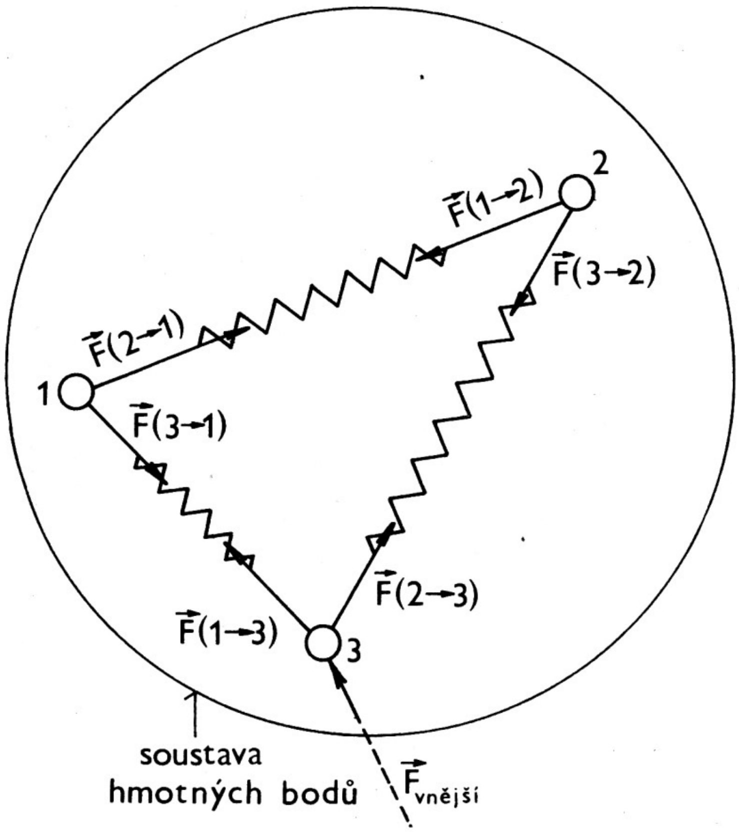
Třetí Newtonův zákon :

Každá akce vyvolá reakci stejně velkou, opačného směru, na stejné nositelce. Ve stejné chvíli vznikají a ve stejné chvíli zanikají. (zákon akce a reakce).

DYNAMIKA

Zákon zachování hybnosti

Představme si uzavřenou soustavu tří těles (částic) včetně jejich vzájemného působení.



Celková zněny hybnosti je pak zřejmě dána součtem jednotlivých změn.

$$\frac{d\vec p_1}{dt} + \frac{d\vec p_2}{dt} + \frac{d\vec p_3}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec p_1 + \vec p_2 + \vec p_3) = \underbrace{\vec F(2\longrightarrow1) + \vec F(1\longrightarrow2)}_{=0} + \underbrace{\vec F(3\longrightarrow1) + \vec F(1\longrightarrow3)}_{=0} =$$

$$= \underbrace{\vec F(3\longrightarrow2) + \vec F(2\longrightarrow3)}_{=0} + \vec F_{vnější} \qquad (2.4)$$

Časová změna celkové hybnosti soustavy částic je rovna výsledné vnější síle působící na soustavu.

Pokud tedy na soustavu nepůsobí vnější síla, pak musí platit :

$$\frac{d\vec{p}_{celk}}{dt} = 0 \quad \text{čili} \quad \vec{p}_{celk} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \text{konst.}$$

Nebo jinak :

Celková hybnost izolované soustavy částic je rovna vektorovému součtu okamžitých hybností jednotlivých částic soustavy a je stálá co do velikosti i orientace.

Př.

Z pušky o hmotnosti 4 kg vyletěla střela o hmotnosti 20 g rychlostí 600 m · s^{-1}. Jak velkou rychlostí se začne pohybovat puška, není-li upevněna?

m_1 = 4 kg, m_2 = 20 g = 0,02 kg, v_2 = 600 m · s^{-1}; v_1 = ?

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$v_1 = \frac{m_2 v_2}{m_1} = 3\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

DYNAMIKA

Newtonovy pohybové rovnice - příklady

Př. 1

Jaká je hmotnost rakety, která dosáhne za 2,5 min od startu rychlosti 6 km · s^{-1}? Tažná síla motorů je 320 kN. Odporové síly a úbytek hmotnosti rakety neuvažujte.

t = 2,5 min = 150 s, v = 6 km · s^{-1} = 6 000 m · s^{-1}, F = 320 kN = 3,2 · 10^5 N; m = ?

$$mv = Ft$$

$$m = \frac{Ft}{v} = 8\,000\ \text{kg} = 8\ \text{t}$$

Př. 2

Míč o hmotnosti 800 g byl vyhozen rychlostí 4 m · s^{-1}. Jak velkou má hybnost? Jak velkým impulzem síly byl míč do pohybu uveden?

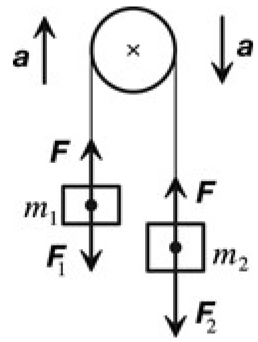
m = 800 g = 0,8 kg, v = 4 m · s^{-1}; p = ?, Ft = ?

$p = mv$ = 3,2 kg · m · s^{-1}

$Ft = mv$ = 3,2 N · s

Př. 3

Na koncích vlákna vedeného přes pevnou kladku jsou zavěšena závaží o hmotnostech 2 kg a 3 kg . Určete velikost zrychlení obou závaží. Tření a hmotnost kladky a vlákna neuvažujte.



m_1 = 2 kg, m_2 = 3 kg, g = 10 m · s^{-2}; a = ? Výslednice sil pro závaží o hmotnosti m_1 je

$F - m_1 g = m_1 a$

a pro závaží o hmotnosti m_2

$m_2 g - F = m_2 a$.

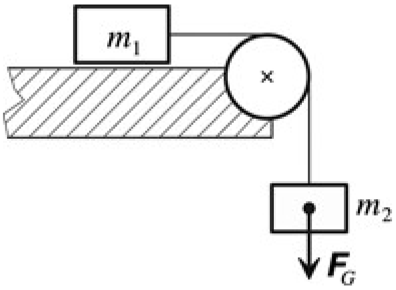
Sečteme-li levé a pravé strany obou rovnic, dostaneme $m_2 g - m_1 g = m_1 a + m_2 a$.

Odtud velikost zrychlení

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = 2\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Př. 4

Určete velikost zrychlení těles o hmotnostech $m_1 = 3$ kg, $m_2 = 2$ kg spojených vláknem podle obr. Síly působící proti pohybu neuvažujte. Jak velkou silou je napínáno vlákno?



$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2} = 4\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}.$$

Smykové tření, valivý odpor

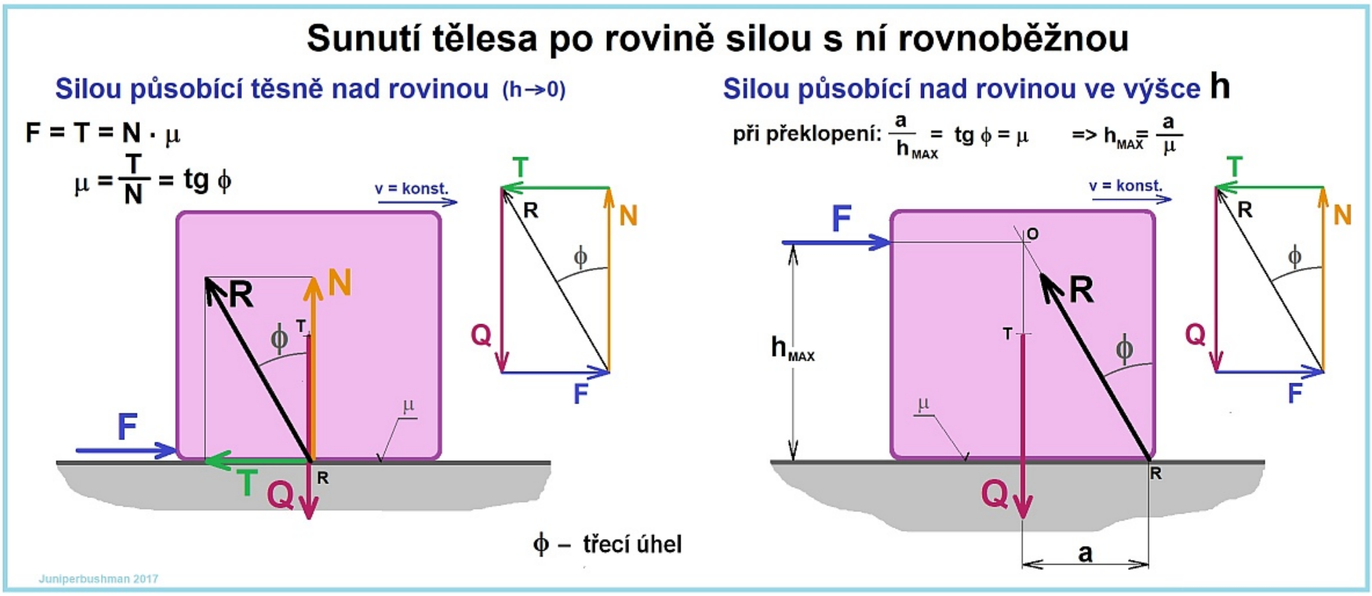
Jak smykové tření, tak i valivý odpor patří mezi pasívní odpory. Působí vždy proti směru pohybu tělesa.

Smykové tření vzniká při smýkání tělesa po podložce. Velikost třecí síly je dána velikostí reakce podložky (na přítlačnou sílu) a podložkou. Vlastnosti tělesa a podložky jsou charakterizovány součinitelem smykového tření (f).

$$T=N*f$$

f (někdy značen též μ) závisí na :

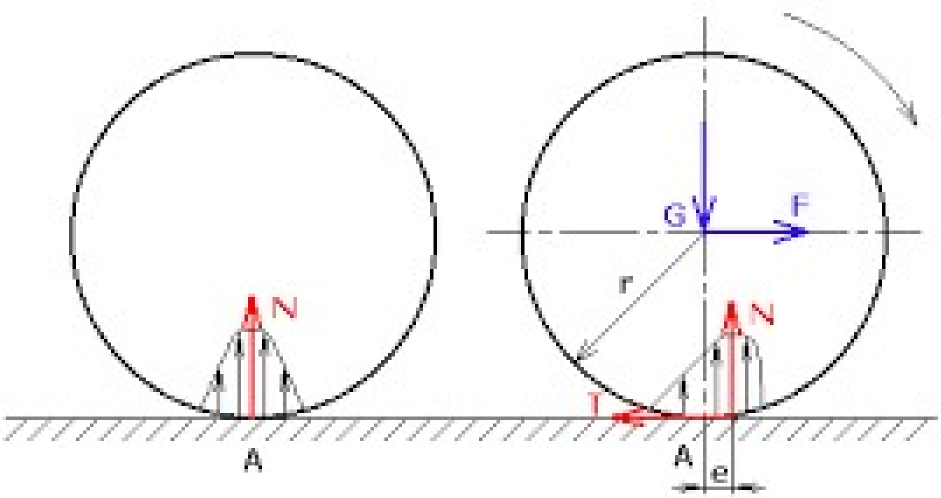
- drsnosti podložky
- materiálu podložky
- mazámí
- rozlišujeme statický a dynamický součinitel podle toho, zda je těleso v klidu nebo se pohybuje.



Valivý odpor

Vzniká při odvalování tělesa po podložce. Vlastnosti podložky a tělesa jsou vyjádřeny ramenem valivého odporu ξ (jednotka m).

Rameno valivého odporu znamená, že při odvalování dojde k vzájemnému posunutí mezi tíhou tělesa (působící v jeho těžišti) a reakcí podložky. Výsledný moment působí proti směru odvalování.



Př. 1

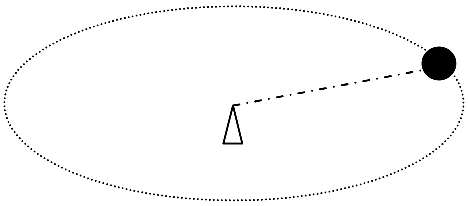
Kvádr o hmotnosti 2 kg udržujeme na vodorovné rovině v přímočarém rovnoměrném pohybu stálou silou, která se rovná 1/4 tíhy kvádru. Určete hodnotu součinitele smykového tření.

Př. 2

Jak velkou vodorovnou silou posunujeme bednu o hmotnosti 80 kg, jestliže ji podložíme válci o poloměru 5 cm? Rameno valivého odporu je 0,01 m.

Dostředivá síla

Jak velkou silou musíme držet provaz o délce 1,5m , jestliže je na jeho konci přivázáno závaží o hmotnosti 5kg a závažím otáčíme ve vodorovné rovině.



Sí

Síla, kterou v laně musíme udržet je úměrná dostředivému zrychlení. Mluvíme tedy o dostředivé síle, kterou je podle zákona akce a reakce lano napínáno. J

Jestliže obecně platí, že síla F = m*a , pro dostředivé zrychlení platí :

$$a_d = \frac{v^2}{r} \text{ nebo } a_d = r * \omega^2$$

Pak pro dostředivou sílu musí platit :

$$\boldsymbol{F_d = m * \frac{v^2}{r}} \text{ **nebo** } \boldsymbol{F_d = m * r * \omega^2}$$

Neinerciální vztažné soustavy

Neinerciální - soustava, která se vzhledem k vztažné soustavě pohybuje jinak než rovnoměrným přímočarým pohybem. Nejjednodušší neinerciální soustavu vytvoříme tak, že koná vzhledem ke vztažné soustavě rovnoměrně zrychlený pohyb. Např. Rozjíždějící se autobus, ve kterém stojíme (jaké síly na nás působí a proč ?).

Na těleso uvnitř takové soustavy působí setrvačná síla , její velikost je odvozena od zrychlení soustavy a směr na základě setrvačnosti je opačný, než zrychlení soustavy, ve které se těleso nachází.

$$F = -m.a$$

Př. 1

Jakou silou působí člověk o hmotnosti 80kg na dno výtahu o hmotnosti 300kg. která se rozjež se zrychlením 0,2 $m.s^{-2}$.

Neinerciální soustavy – rotace

Při rotaci působí na těleso setrvačná síla o velikosti Fs = $m\omega^2 r$.

Př. Jak velkou úhlovou rychlostí je nutné otáčet s kbelíkem plným vody (10 kg) na laně dlouhém 1m, aby se voda nevylila.

Neinerciální soustavy příklady

Př. 1

Těžní klec s nákladem o celkové hmotnosti 5 t se rozjíždí z klidu směrem vzhůru tak, že za dobu 2,5 s dosáhne rychlosti 5 m · s^{-1}. Jak velkou silou je zatěžováno tažné lano?

$m = 5$ t $= 5\,000$ kg, $g = 10$ m · s^{-2}, $t = 2{,}5$ s, $v = 5$ m · s^{-1}; $F = ?$

$$F = mg + ma = mg + \frac{v}{t} = m\left(g + \frac{v}{t}\right) = 60\,000\ \mathrm{N} = 60\ \mathrm{kN}$$

Př. 2

Kosmická loď startuje směrem vzhůru se stálým zrychlením 50 m · s^{-2}. Jak velkou tlakovou silou působí kosmonaut na sedadlo, je-li jeho hmotnost s výstrojí 90 kg?

$a = 50$ m · s^{-2}, $g = 10$ m · s^{-2}, $m = 90$ kg; $F = ?$

$F = F_G + F_s = mg + ma = m(g + a) = 5\,400$ N

Př. 3

Automobil projíždí zatáčku o poloměru 80 m. Jakou největší rychlostí může jet, je-li součinitel smykového tření mezi pneumatikami a povrchem vozovky 0,5?

$$\frac{mv^2}{r} \leq fmg \Rightarrow v \leq \sqrt{frg}.$$

Maximální rychlost, při které ještě nedojde ke smyku, je

$$v_{\max} = \sqrt{fgr} = 20\ \mathrm{m \cdot s^{-1}} = 72\ \mathrm{km \cdot h^{-1}}.$$

Př. 4

Lyžař o hmotnosti 50 kg jede rychlostí 12 m · s^{-1} přes vrchol kopce s poloměrem zakřivení 20 m. a) Jak velkou tlakovou silou působí jeho lyže na sníh v nejvyšším bodě trajektorie? b) Jak velkou rychlostí by musel jet, aby tlaková síla lyží na sníh byla nulová?

a) $F = mg - \frac{mv^2}{r} = m\left(g - \frac{v^2}{r}\right) = 140\ \mathrm{N}$

b) $F = 0,\ g = \frac{v_1^2}{r},\ v_1 = \sqrt{gr} = 14\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$

Př. 5

Proudové letadlo letí rychlostí 300 m · s^{-1}. Určete nejmenší poloměr oblouku trajektorie letadla, jestliže pilot snese krátkodobě až devítinásobné přetížení. Trajektorie letadla je v horizontální rovině.

$\frac{mv^2}{r} \leq 9mg \Rightarrow r \geq \frac{v^2}{9g},$

nejmenší poloměr

$r_{\min} = \frac{v^2}{9g} = 1\,000\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{km}.$

Příklady II neinerciální systémy

Př.1

O jaký úhel se musí odklonit cyklista od svislého směru, jestliže projíždí zatáčku o poloměru křivosti 10 m rychlostí 18 km · h^{-1}?

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{F_s}{F_G} = \frac{v^2}{rg} = 0{,}25,\ \text{úhel } \alpha = 14°.$$

Př. 2

Při cirkusové atrakci jezdí motocyklista v uzavřené kouli o poloměru 5 m všemi směry. Jakou nejmenší rychlostí musí motocyklista jet? Vzdálenost těžiště motocyklu s jezdcem od vnitřní stěny koule je 0,6 m.

$$\frac{mv^2}{r-d} \geq mg,$$

odtud

$$v^2 \geq g(r-d), v \geq \sqrt{g(r-d)}.$$

Minimální rychlost, při níž je setrvačná odstředivá síla právě rovna tíhové síle, je

$$v_{\min} = \sqrt{g(r-d)} = 6{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Př. 3

Proudové letadlo letí rychlostí 300 m · s^{-1}. Určete nejmenší poloměr oblouku trajektorie letadla, jestliže pilot snese krátkodobě až devítinásobné přetížení. Trajektorie letadla je v horizontální rovině.

Nepřihlížíme-li k tíhové síle, působící svisle dolů, je

$$\frac{mv^2}{r} \leq 9mg \Rightarrow r \geq \frac{v^2}{9g},$$

nejmenší poloměr

$$r_{\min} = \frac{v^2}{9g} = 1\,000\ \mathrm{m} = 1\ \mathrm{km}.$$

Mechanická práce

Obecný vzorec pro výpočet práce :

$$W = F \cdot s$$

Za předpokladu, že síla a dráha mají shodný směr. Pokud tomu tak není, počítáme pouze s tou složkou síly, která leží ve směru dráhy s.

Př.

Zadání příkladu

Poznámka :

Co když je drahou oblouk nebo kružnice ?

Výkon a účinnost

Opakování

Řešení příkladů

Př 1

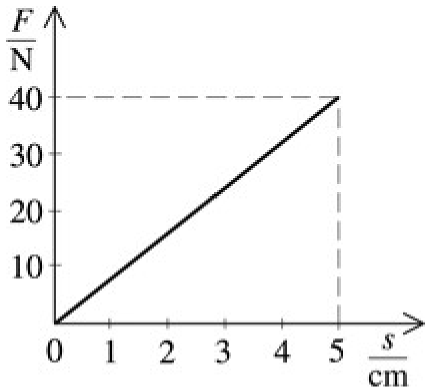
Jakou mechanickou práci vykoná chodec o hmotnosti 80 kg, ujde-li po vodorovné rovině vzdálenost 1,5 km, přičemž při každém kroku o délce 75 cm zvedá těžiště svého těla o 2 cm?

Př. 2

Po vodorovné trati se rozjíždí vlak se zrychlením 0,5 m · s^{-2}. Jakou práci vykoná lokomotiva o tažné síle 40 kN za dobu 1 min? Odporové síly neuvažujte.

Př . 3

Z grafu určete práci, kterou vykoná síla při natažení pružiny o délku 5 cm.



Př. 4

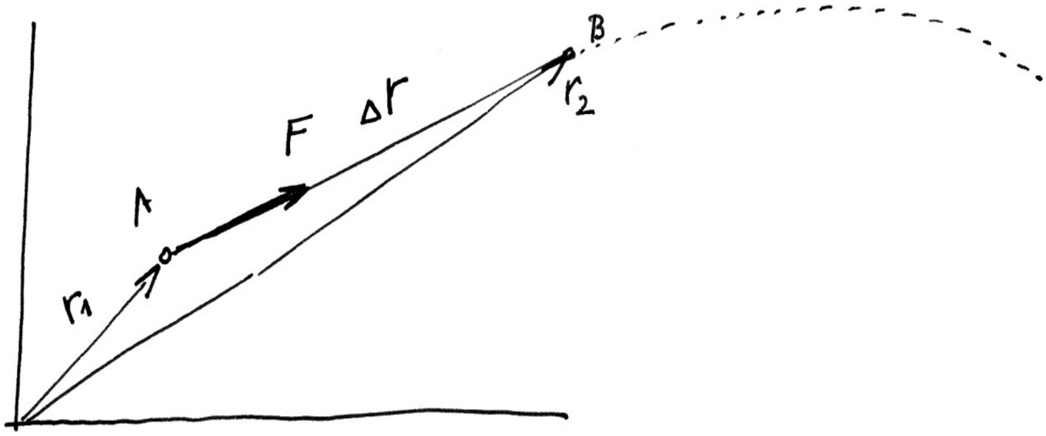
Důlní čerpadlo o výkonu 300 kW čerpá vodu z hloubky 180 m. Jaké množství vody vyčerpá za 1 h?

Př. 5

Elektromotor jeřábu o příkonu 20 kW dopravuje náklad o hmotnosti 800 kg stálou rychlostí 2 m · s^{-1}. Určete účinnost zařízení.

Mechanická energie

Kinetická energie Dráhový účinek síly



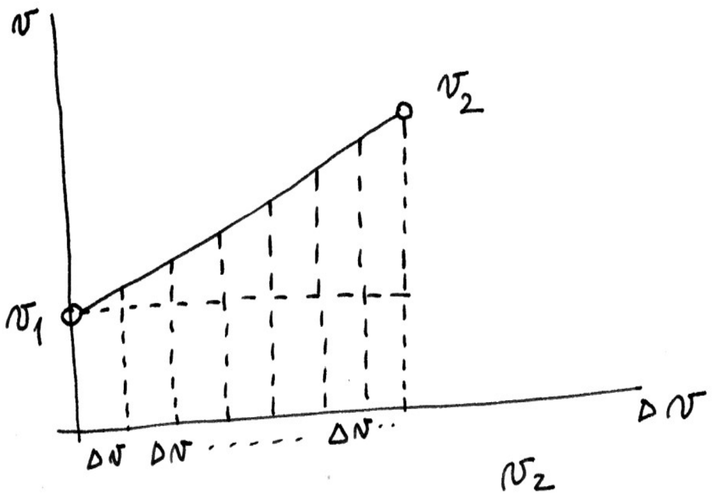
$$\Delta W = F \cdot \Delta r$$

$$\Delta W = m \cdot \frac{\Delta v}{\Delta t} \cdot \Delta r$$

$$\Delta W = m \cdot \Delta v \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

$$\Delta W = m \cdot v \cdot \Delta v$$

Jak vypočítat $v \cdot \Delta v$?



$$W = \sum \Delta W = m \cdot \sum_{v_1}^{v_2} \underbrace{v \cdot \Delta v} \Rightarrow \text{plocha}$$

pod křivkou

$$S = (v_2 - v_1) \cdot (v_2 - v_1) \cdot \frac{1}{2} + v_1 \cdot (v_2 - v_1)$$

$$S = \frac{1}{2} (v_2 - v_1)^2 + v_1 \cdot v_2 - v_1^2$$

$$S = \frac{v_2^2}{2} - \frac{2 \cdot v_1 v_2}{2} + \frac{v_1^2}{2} + v_1 v_2 - v_1^2$$

$$S = \frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2}$$

$$W = m \cdot \left(\frac{v_2^2}{2} - \frac{v_1^2}{2} \right)$$

$$W = \frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2$$

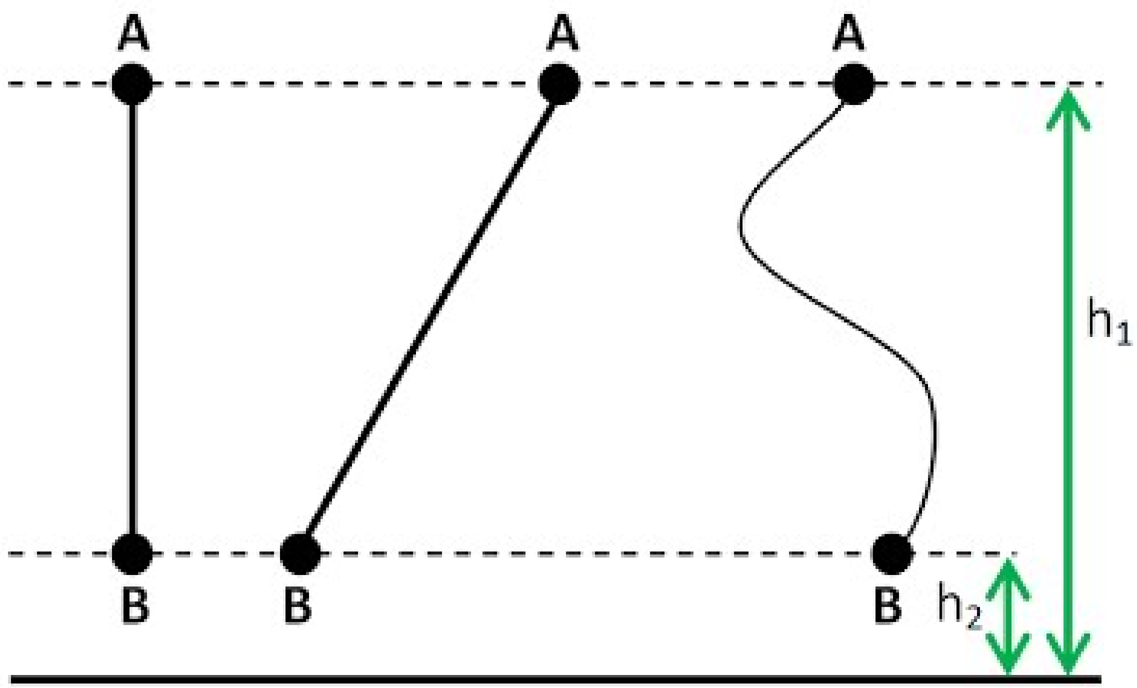
Vykonaná práce je dána rozdílem dvou „hodnot" na začátku a na konci.

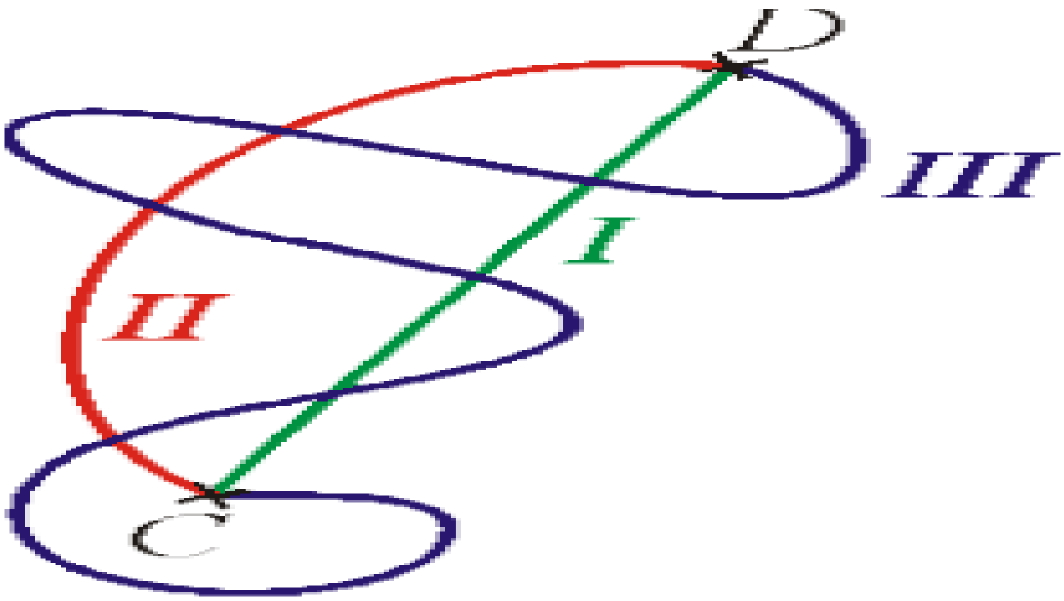
Těmto „hodnotám" říkáme kinetická energie

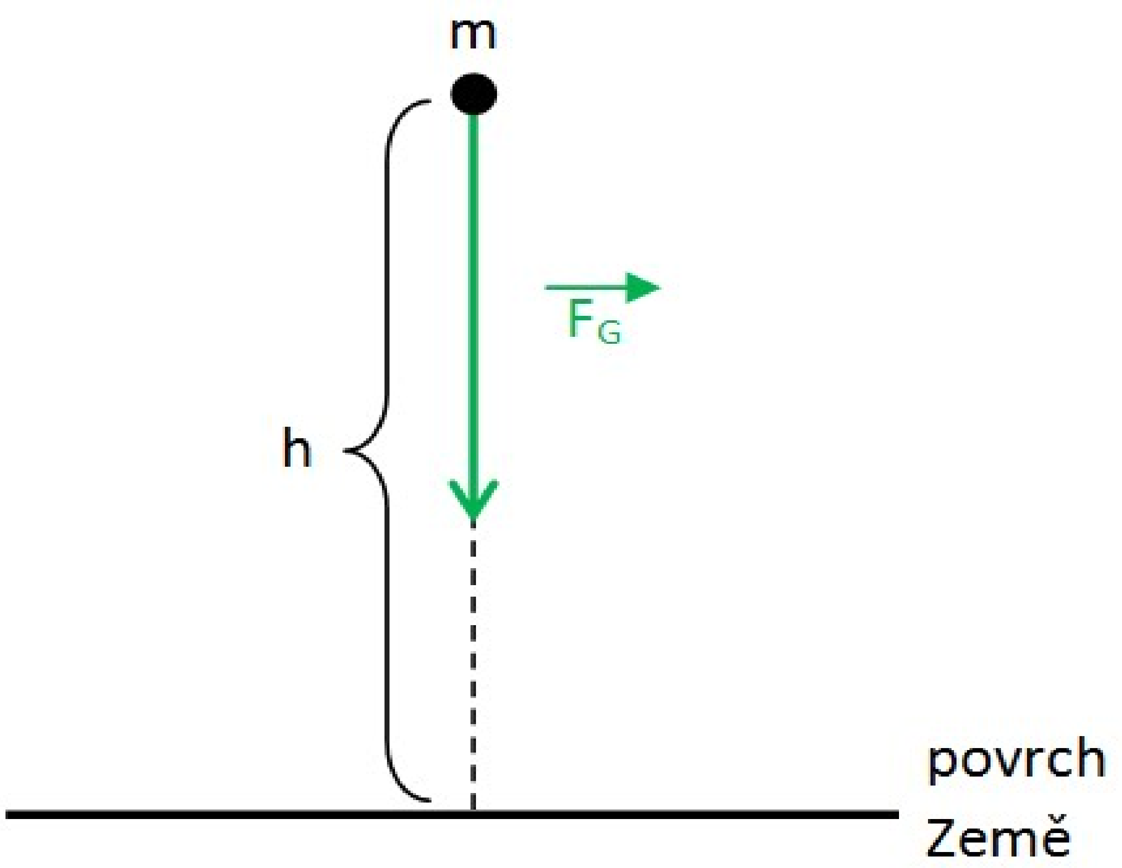
$$\boxed{E_K = \frac{1}{2} m v^2}$$

Potenciální energie

Dáno umístěním (souřadnicí) tělesa v silovém poli. Nejčastěji počítáme potenciální energii vzhledem ke gravitačnímu poli Země. Potenciální energie je v tomto případě dána prací, kterou vykonáme při myšleném přemístění tělesa na zvolenou souřadnici.







$$E_p = W = F_G \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

m ... hmotnost

g ... tíhová zrychlení

h ... výška nad povrchem země

Silové pole, ve kterém platí, že se zachovává celková mechanická energie nazýváme potenciálové nebo také konzervativní. Protože se zde mechanická energie „konzervuje“. V takovém poli platí princip zachování mechanické energie.

Mnohdy se ovšem mechanická energie nezachovává, mluvíme o poli nekonzervativním nebo též disipativním. Energie mechanická se zde dále přeměňuje například na energii tepelnou (tepelného pohybu). Zde pak mluvíme o obecnějším zákonu zachování energie.

Energie, zákon zachování energie

Př. 1

Jakou kinetickou energii má volně padající těleso o hmotnosti 1 kg za dobu 1 s, 2 s a 3 s od začátku pohybu? Odpor vzduchu neuvažujte.

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mg^2t^2$$

Př. 2

Střela o hmotnosti 20 g zasáhla strom a pronikla do hloubky 10 cm, Jak velkou rychlostí se pohybovala před zásahem, je-li průměrná odporová síla dřeva stromu 4 kN?

$$Fs = \frac{1}{2}mv^2$$

a odtud rychlost střely

$$v = \sqrt{\frac{2Fs}{m}} = 200\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$

Př. 3

Ocelovou trubku o hmotnosti 20 kg a délce 5 m, která leží na vodorovné rovině, postavíme do svislé polohy. O jakou hodnotu se zvětší její tíhová potenciální energie?

$\Delta E_p = mgh = mgl/2 = 500$ J.

Př . 4

Těleso o hmotnosti 1 kg volně padá z výšky 45 m. Sestrojte grafy jeho kinetické a potenciální energie jako funkce času.

Vztahy pro kinetickou a potenciální energii vyjádříme jako funkce času. Do vztahu pro kinetickou energii

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

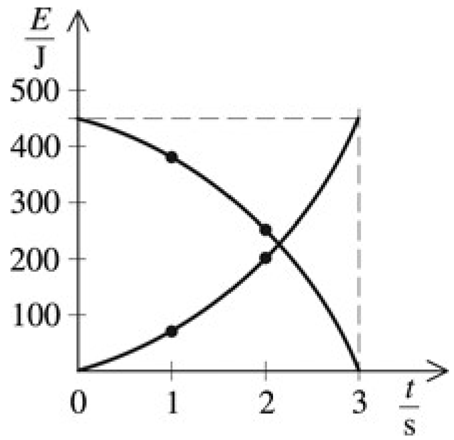
dosadíme rychlost volného pádu $v = gt$ a dostaneme

$$E_k = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

Do vztahu pro potenciální energii $E_p = mg(h - s)$ dosadíme dráhu volného pádu

$s = \frac{1}{2}gt^2$ a dostaneme $E_p = mg\left(h - \frac{1}{2}gt^2\right)$.

Sestavíme tabulku hodnot E_k a E_p pro řadu hodnot času $t \in \langle 0, 3 \rangle$ v sekundách a příslušné hodnoty vyneseme do grafu (viz obr. R2-205 [2-18]). Graf můžeme sestrojit také pomocí jednoduchého programu na počítači.



Př. 5

Z okna domu ve výšce 8 m nad povrchem země upustí dítě míč o hmotnosti 0,4 kg. Během pádu působí na míč odpor vzduchu, takže míč dopadne na zem rychlostí 5 m · s^{-1}. Jak velká je průměrná odporová síla vzduchu?

Práce vykonaná odporovou silou se rovná úbytku mechanické energie,

$$W = Fh = mgh - \frac{1}{2}mv^2,$$

velikost odporové síly

$$F = mg - \frac{mv^2}{2h} = 3{,}4 \text{ J}.$$

Graviteční pole

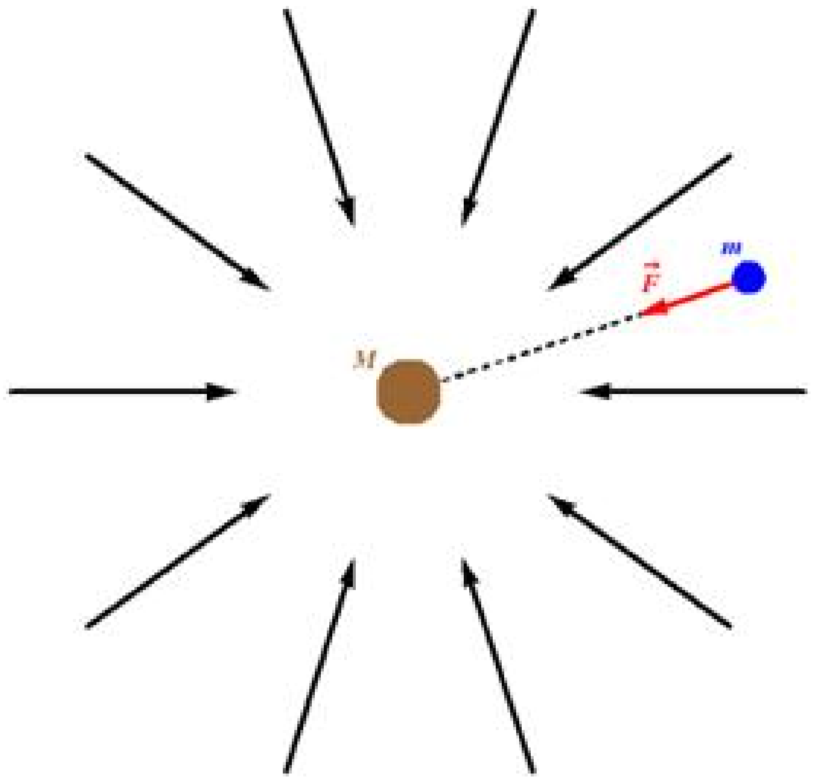
Newtonův gravitační zákon

Gravitační pole zprostředkuje silové působení mezi tělesy. Velikost gravitačního působení vyjadřujeme přitažlivou gravitační silou, pro její velikost platí Newtonův gravitační zákon.

$$F_g = \varkappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$$

Vysvětlení „zákona čtverců“

Gravitační zrychlení



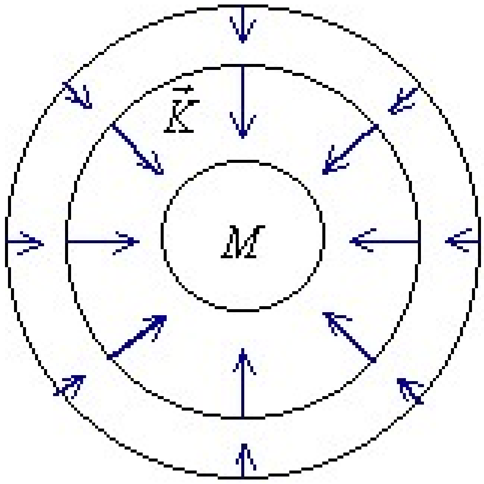
$F_g = m.a_g$

$$\kappa \frac{m.M_Z}{r^2} = m.a_g$$

$$a_g = \frac{\kappa M_Z}{r^2}$$

<u>**Centrální a homogenní gravitační pole, tíhová síla**</u>

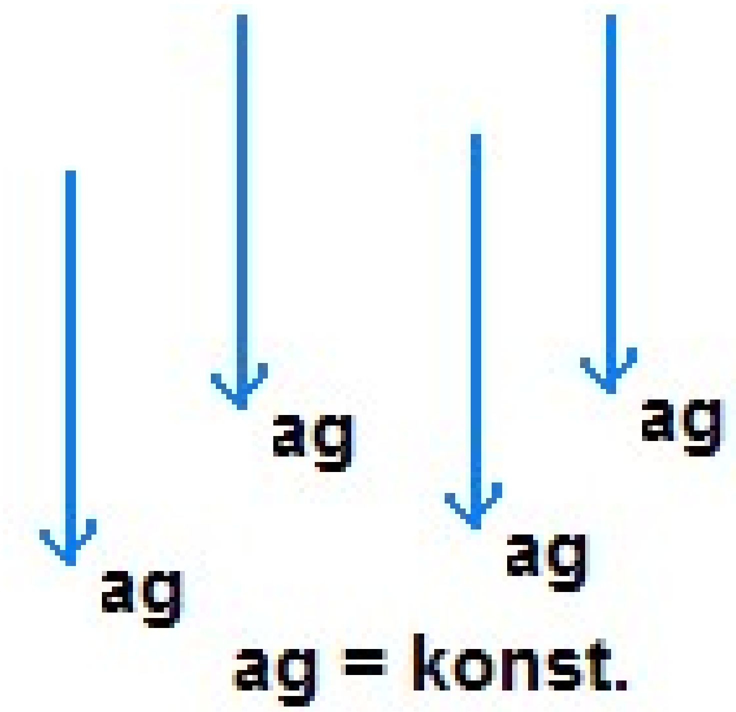
Pokud se vzdalujeme od povrchu Země, budeme **vnímat gravitační pole jako centrální**, tedy směřující do středu Země se snižující se velikostí v závislosti na vzdálenosti.



Vektorový model centrálního gravitačního pole

Intenzitu takového pole počítáme jako oddíl : $\vec{K} = \frac{\overrightarrow{Fg}}{m}$

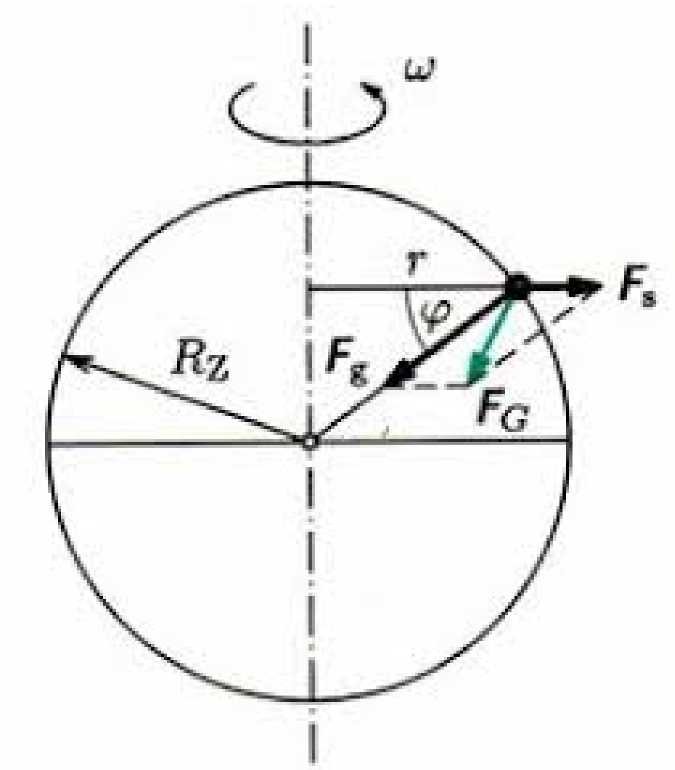
Pokud se nacházíme v blízkosti povrchu Země, má gravitační pole charakter homogenního pole :



Tíhová síla, tíhové zrychlení

Na tělesa v blízkosti Země nepůsobí pouze gravitační síla, ale také síla, která závisí na rotaci, tedy mimo jiné na vzdálenosti tělesa od rovníku. Výsledná tíhová síla je tedy vektorovým součtem gravitační síly a odstředivé síly rotace Země.

$$\mathbf{F_G = F_g + F_0}$$

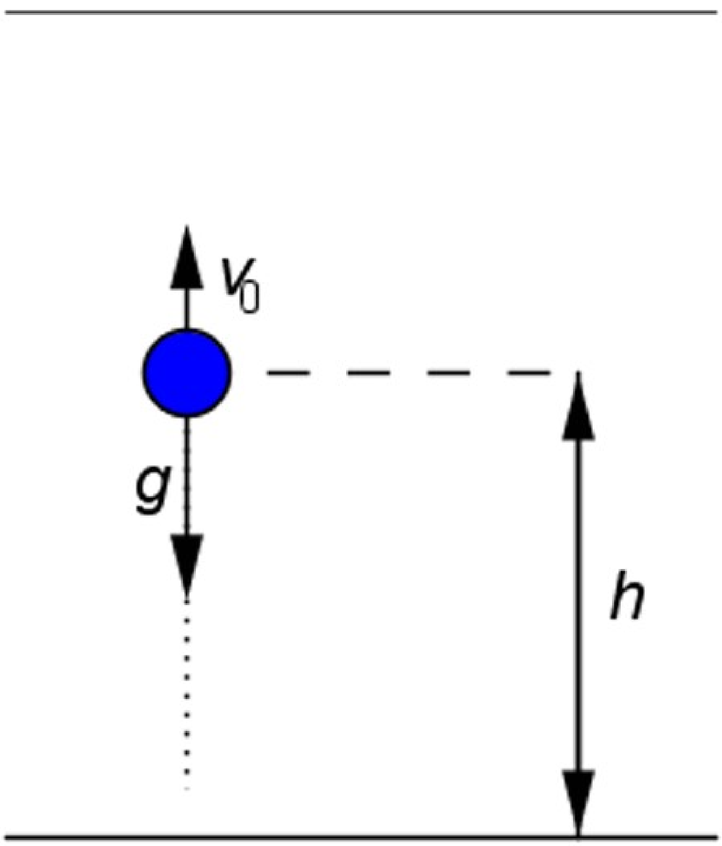


Odtud tíhoví zrychlení „g“ bylo dohodou stanoveno 9,80665 m.s^{-2}

Vrhy

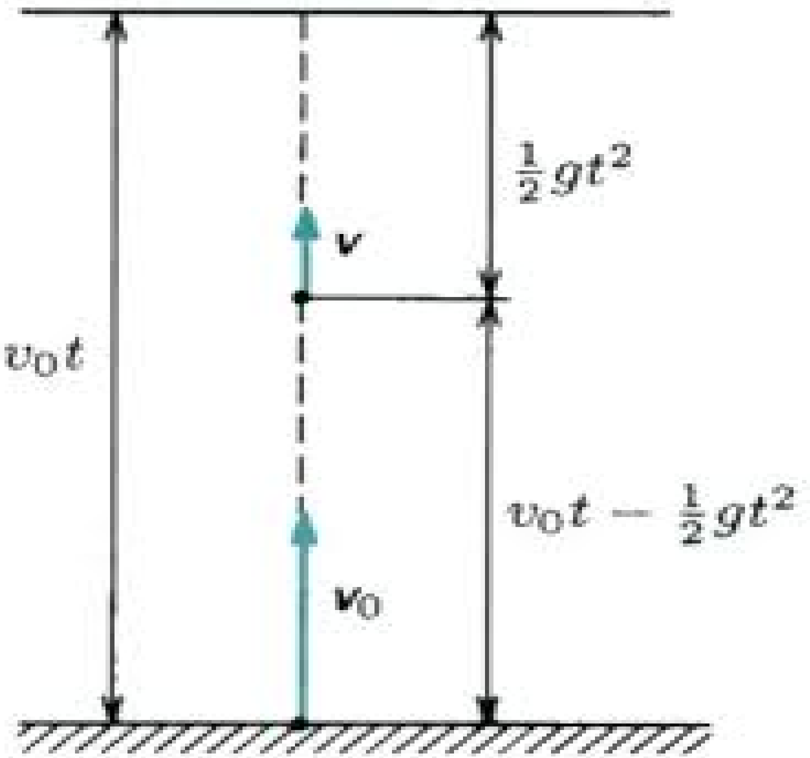
Vrhy tvoří kombinaci volného pádu a další složky.

<u>Svislý vrh vzůru</u>



<u>Řešíme úlohy :</u> Závislost rychlosti na čase

Závislost souřadnice na čase



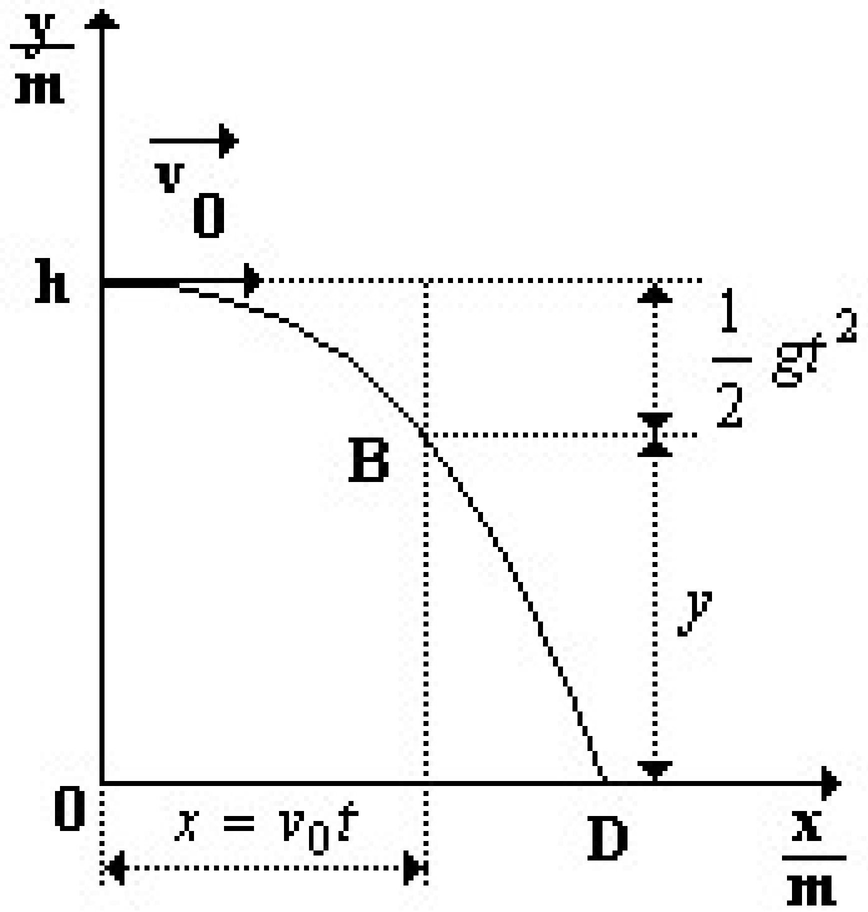
Svislý vrh vzhůru

$$v = v_0 + gt$$

$$h = v_0t + \frac{1}{2}gt^2$$

Vodorovný vrh

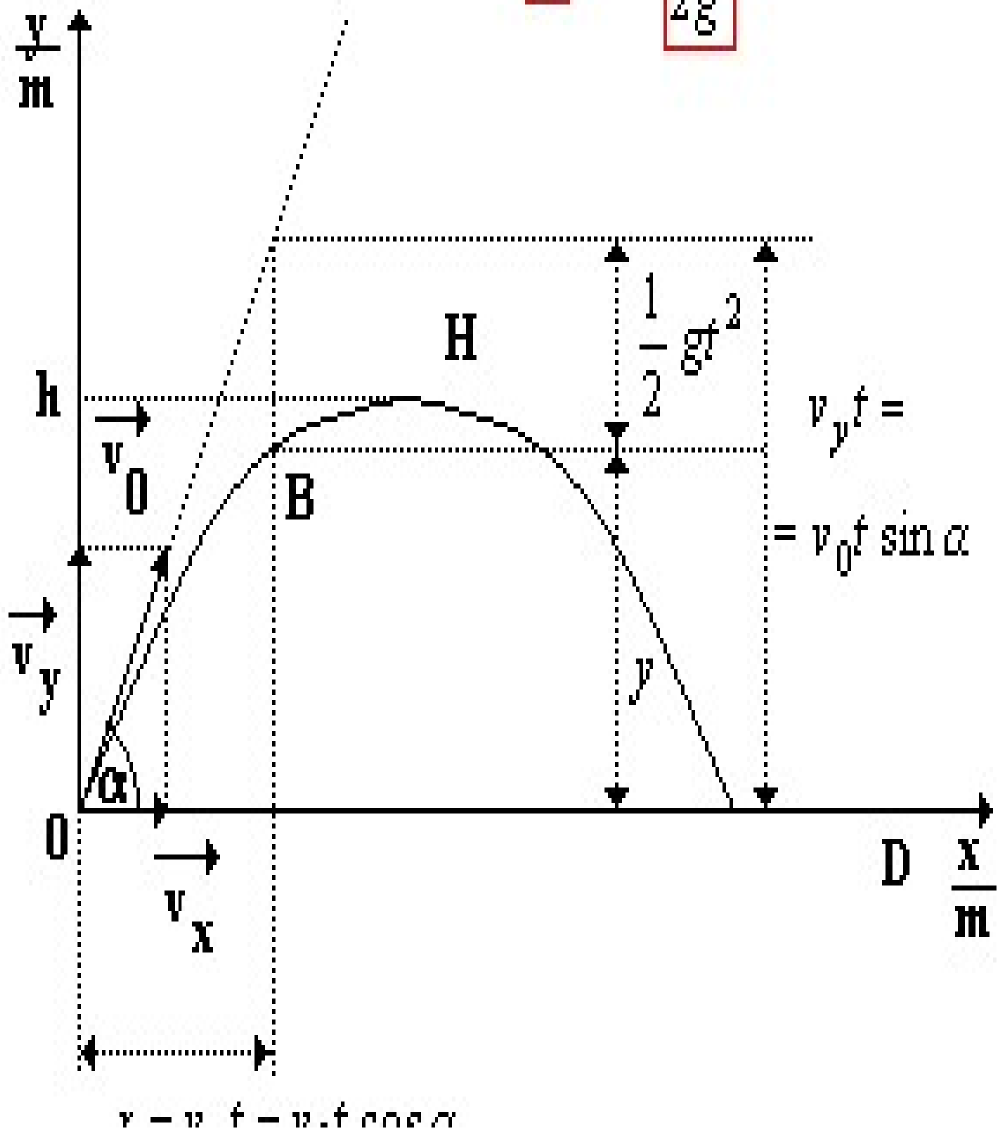
Kombinace vodorovného pohybu (rovnoběžný s osou x) a volného pádu.



Šikmý vrh

délku vrhu $\boxed{d} = \dfrac{\boxed{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}}{\boxed{g}} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$,

maximální výšku vrhu $\boxed{h} = \dfrac{\boxed{v_0^2 \sin^2 \alpha}}{\boxed{2g}}$.



Vrhy – příklady

Př. 1

Jak velkou rychlostí tryská voda z trubice vodotrysku, jestliže vystupuje do výšky 5 m?

Př. 2

Z okna domu ve výšce 20 m nad vodorovnou rovinou vyhodil chlapec vodorovným směrem tenisový míček rychlostí 5 m $\cdot$ s^{-1}. Určete: a) za jakou dobu a v jaké vzdálenosti od domu míček dopadne, b) jak velká je rychlost dopadu míčku.

Př. 3

Hráč vykopl míč z povrchu hřiště pod úhlem 45° počáteční rychlostí 20 m $\cdot$ s^{-1}. Určete: a) do jaké výšky míč vystoupil, b) do jaké vzdálenosti od místa vykopnutí míč dopadl na hřiště.

Př. 4

Pod jakým úhlem musíme vrhnout těleso, aby se výška výstupu rovnala délce vrhu?

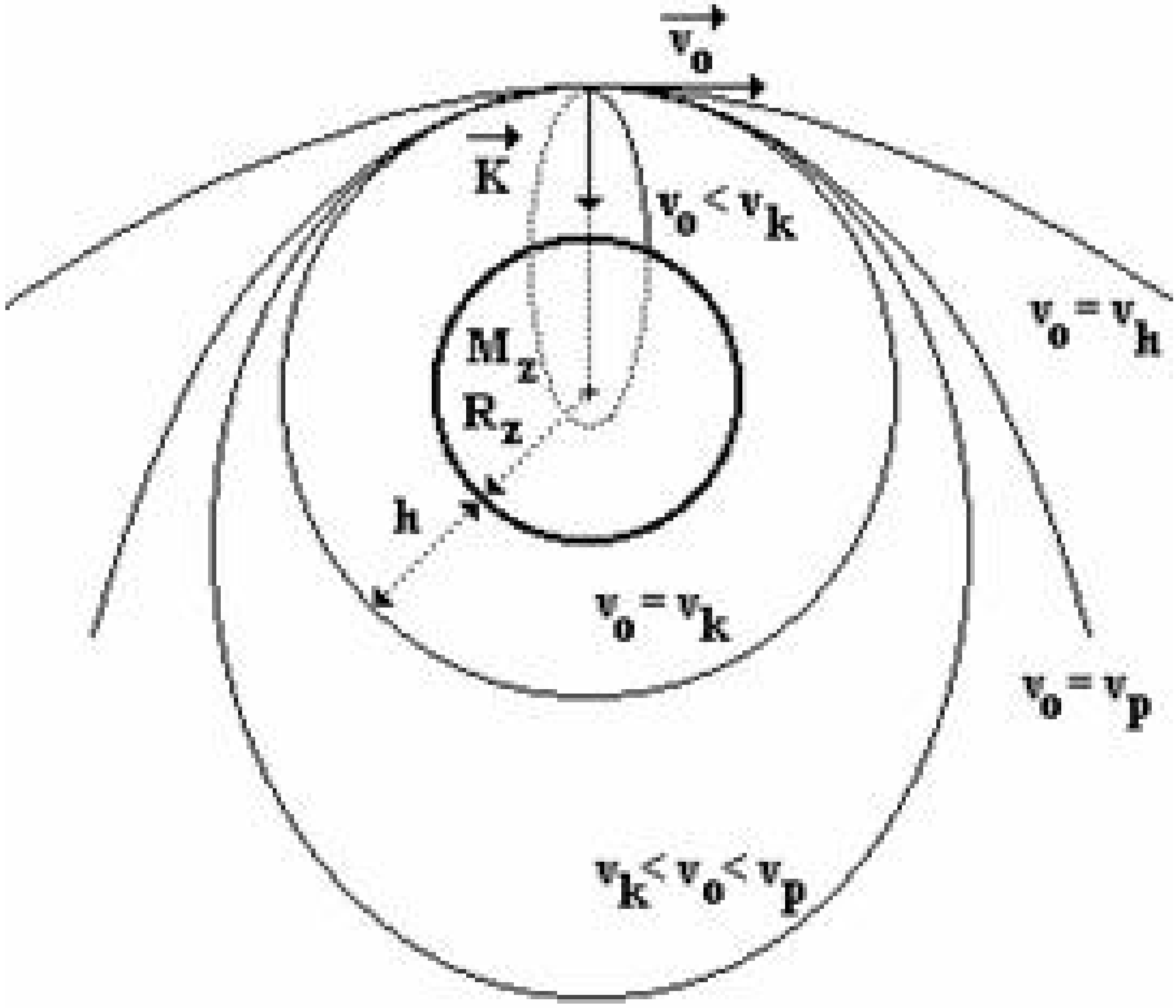
Vrhy – příklady II

Náboj vystřelený pod úhlem 48° počáteční rychlostí 400 m/s zasáhl po 3s letu svůj cíl. Jak daleko a jak vysoko nad úrovní střelce byl tento cíl ?

Po svislé přímce se pohybují dvě kuličky. Jedna padá volným pádem z výšky 25 m , druhá je vržena svisle dolů počáteční rychlostí o velikosti v_0 z výšky 27 m nad zemským povrchem. Obě kuličky se začnou pohybovat ve stejném okamžiku. Vypočtěte, jak velkou rychlostí musí být vržena druhá kulička, aby se obě potkaly 2,0 m nad zemským povrchem ?

V okamžiku počátku volného pádu tělesa z výšky 80 m je proti němu svisle vzhůru ze Země rychlostí o velikosti v" vrženo těleso. Obě tělesa se srazí ve výšce 20 m nad povrchem Země . Jaká byla velikost počáteční rychlosti vrhu vzhůru?

Pohyby těles v centrálním gravitačním poli Země



Těleso v závislosti na počáteční rychlosti v_0 opisuje část elipsy, celou elipsu, kruhovou dráhu, parabolu.

Kruhová rychlost :

$$\varkappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{(R_Z + h)^2} = m \cdot a_d \ (a_d = \frac{v^2}{r};\ v = v_k;\ r = R_Z + h)$$

$$\varkappa \cdot \frac{m \cdot M_Z}{(R_Z + h)^2} = m \cdot \frac{v_k^2}{R_Z + h}$$

$$v_k = \sqrt{\frac{\varkappa \cdot M_Z}{R_Z + h}}$$

B) $v_k = \sqrt{\frac{\varkappa \cdot M_Z}{R_Z}} = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}98 \cdot 10^{24}}{6{,}38 \cdot 10^{6}}} = 7{,}9$ km/s (v_k ... kruhová rychlost)

1. KOSMICKÁ RYCHLOST (těleso obíhá kolem Země po kruhové dráze)

v_k = 7,9 km/s

C) $v_k \le v_0 < v_p$ z toho vyplývá, že těleso je družicí Země (pohybuje se po elipse)

D) $v_0 = v_p$ → těleso opouští Zemi a stává se družicí Slunce - **kosmické sondy** (v_p … parabolická (úniková) rychlost)

2. KOSMICKÁ RYCHLOST

v_p = 11,2 km/s

($v_p = v_k \cdot \sqrt{2}$)

E) $v_p \le v_0 < v_h$ → těleso je družicí Slunce

F) $v_0 = v_h$ → těleso se vymaní z gravitačního působení Slunce a opustí Sluneční soustavu po hyperbole

(v_h … hyperbolická rychlost)

3. KOSMICKÁ RYCHLOST

v_h = 16,6 km/s

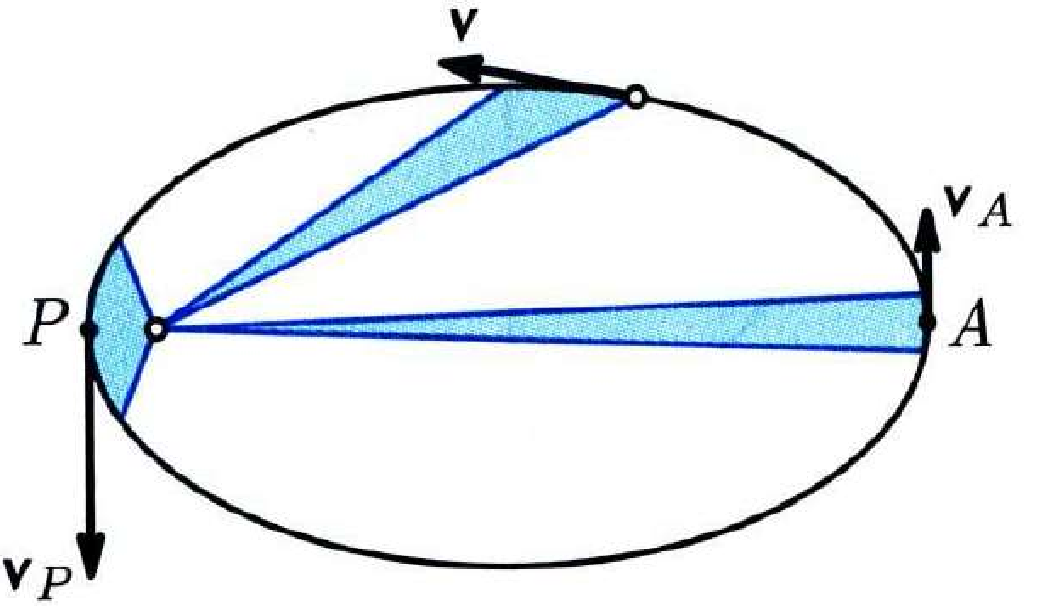
Téma : Pohyby těles v gravitačním poli Slunce

První Keplerův zákon

Planety se pohybují kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce.

Druhý Keplerův zákon

Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní.



P …….perihelium (přísluní)
A…….afélium (odsluní)

Podle keplerova zákona tedy platí, že : $v_A < v < v_P$

Třetí Keplerův zákon :

Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin délek hlavních poloos jejich trajektorií.

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{r_1^3}{r_2^3}$$

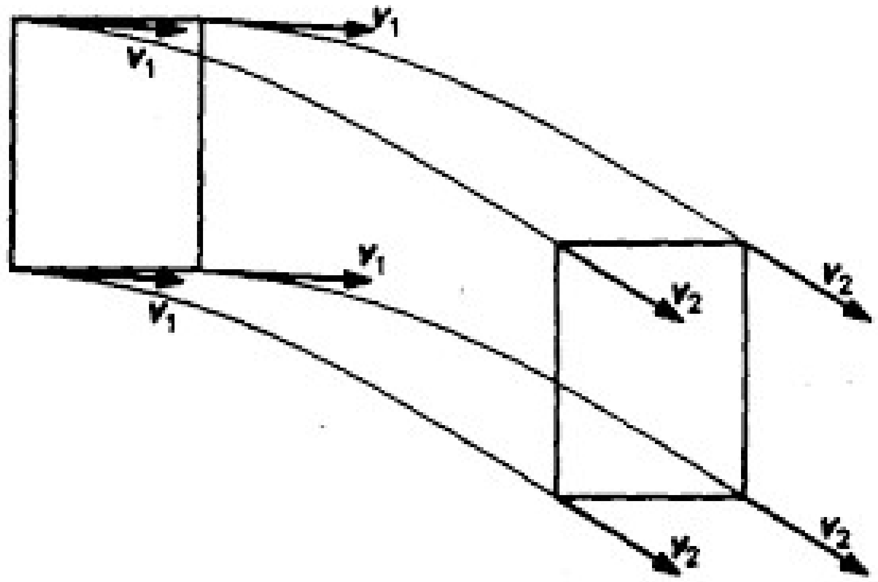
Příklad :
Vypočtěte vzdálenost Jupiteru od Slunce, jestliže víme, že $T_{Země} = 1$ rok , $T_{Jupiteru} = 12$ roků.
Vzdálenost Země - Slunce je 1 AU.

Pohyb tuhého tělesa

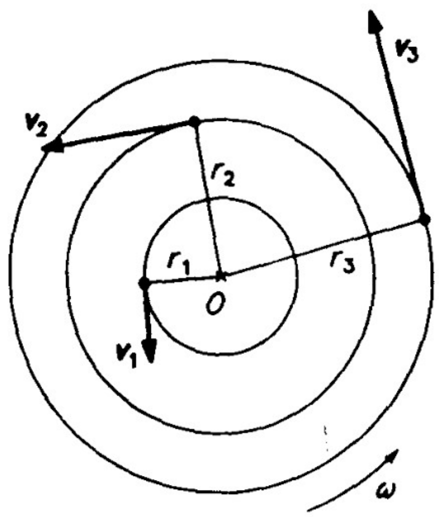
Tuhé těleso je ideální těleso, jehož tvar, ani objem se účinkem libovolně velkých sil nemění.

Základní druhy pohybu :

- Posuvný pohyb – každá přímka spojená s tělesem zachovává rovnoběžnost se svojí původní polohou.



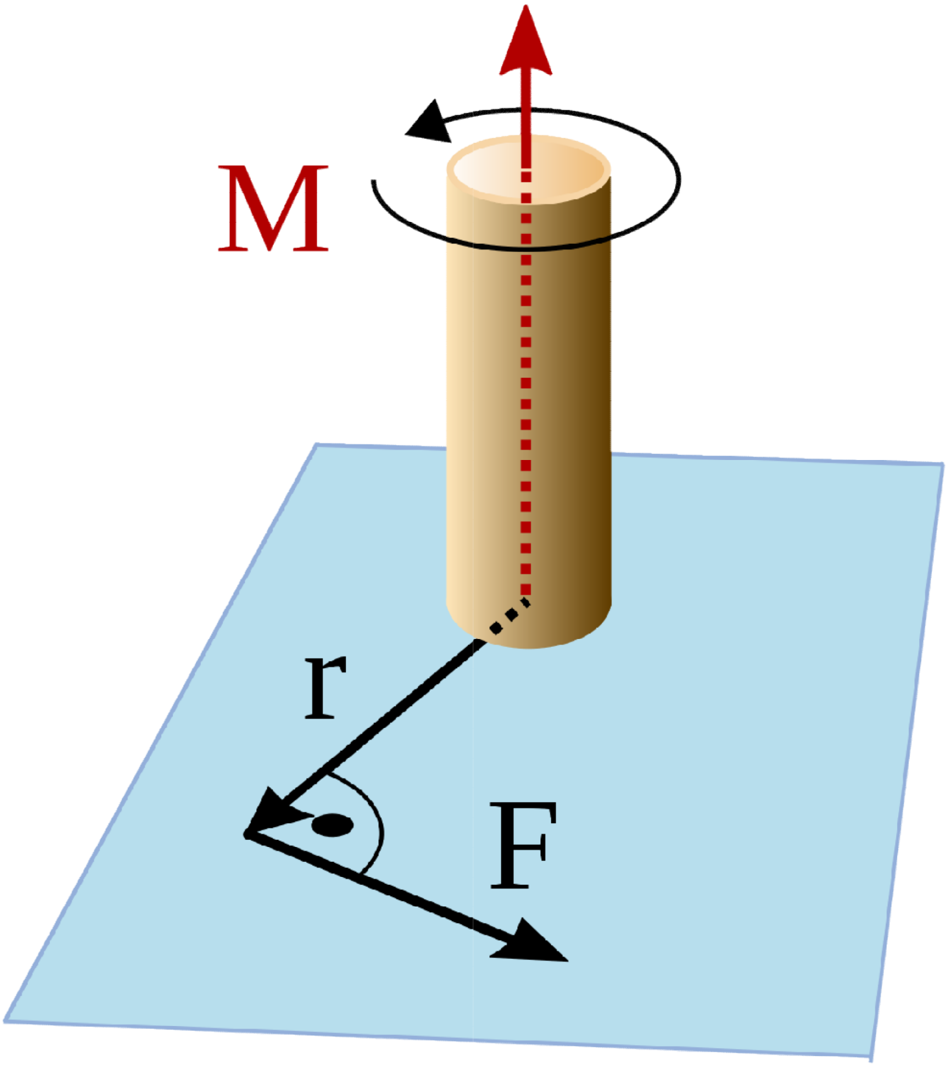
- Otáčivý pohyb – všechny body tělesa mají v daném okamžiku shodnou úhlovou rychlost



- Složený pohyb – vzniká složením obou výše uvedených pohybů.

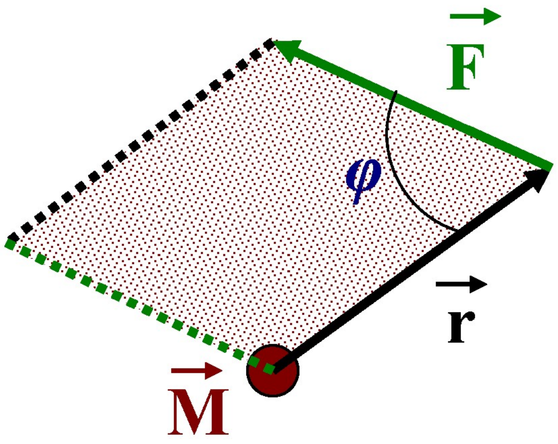
Moment síly vzhledem k ose otáčení

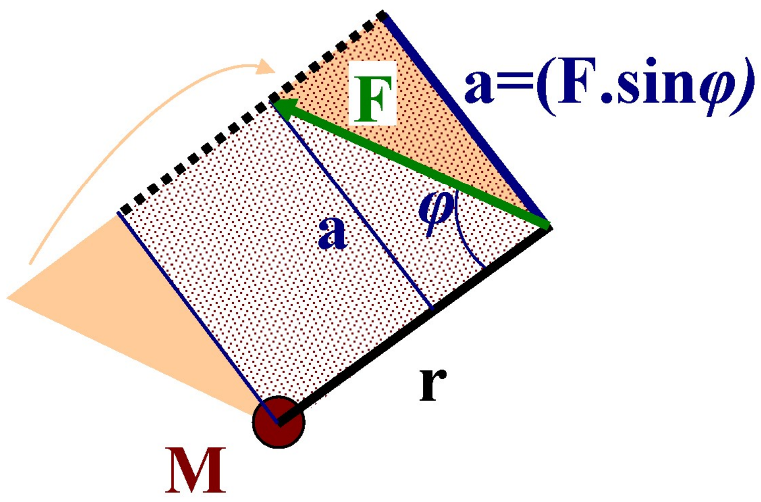
Moment síly vyjadřuje otáčivý účinek síly.



$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r}$$

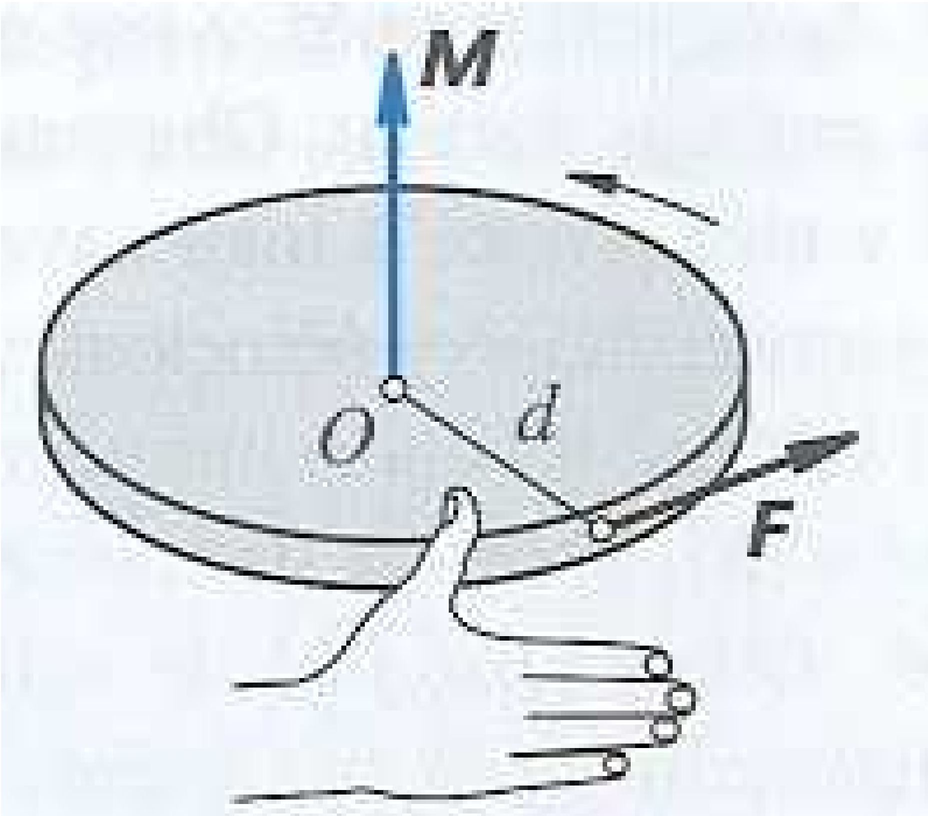
$$M = F.\sin\varphi.r$$





Jestliže síla a rameno jsou kolmé, přechází vzorec na tvar : $M = F \cdot d$ (síla krát rameno) , kde rameno je tedy kolmá vzdálenost osy otáčení a vektoru síly.

Momenty lze skládat a platí, že výsledný moment je vektorovým součtem všech momentů od jednotlivých sil.



Pro výsledný směr momentu platí pravidlo pravé ruky.

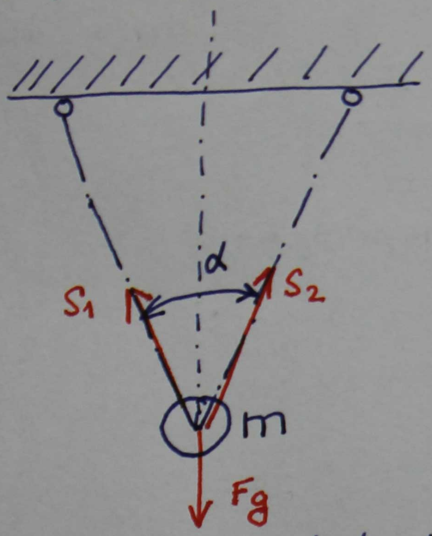
Skládání sil, výslednice sil

Pro výslednici sil platí, že její účinky na těleso jsou stejné, jako účinky soustavy sil, kterou výslednice nahrazuje.

Silová dvojice, síla pro rovnováhu, reakce vazeb

Síla pro rovnováhu – příklady

Př. Vypočtěte sílu v lanech l_1, l_2 podle obrázku.



zadáno : $m = 20 kg$
$\alpha = 60°$
$g = 10 m \cdot s^{-1}$

Vypočítat : S_1, S_2

Těleso se nepohybuje => musí nastat rovnováha sil $S_1; S_2; F_g$

Rozložit do směrů x, y:

$$x: -S_1 \cdot \sin \alpha/2 + S_2 \cdot \sin \alpha/2 = 0$$

rovnováha

$$y: S_1 \cdot \cos \alpha/2 + S_2 \cdot \cos \alpha/2 - m \cdot g = 0$$

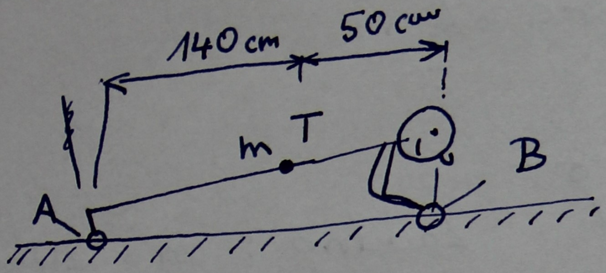
$$x: S_1 = S_2$$

$$y: 2 \cdot S_1 \cdot \cos \alpha/2 = m \cdot g$$

$$S_1 = \frac{m \cdot g}{2 \cdot \cos \alpha/2} \Rightarrow S_1 = 115{,}47 N$$

$$S_2 = 115{,}47 N$$

<u>Úkol</u>: Jakou silou působí člověk na podložku v místě A a B

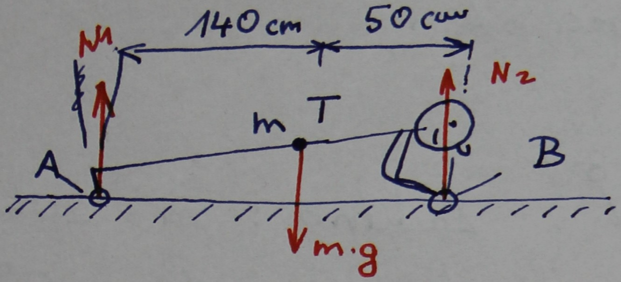


$m = 100\,kg$

Člověk se nepohybuje.

Nosník

Úkol: Jakou silou působí člověk na podložku v místě A a B



$m = 100\,kg$

Člověk se nepohybuje.

Nejprve kolmo na podložku umístíme její reakce (N_1; N_2) tak, jak podložka působí na člověka. Na člověka působí ještě tíha $m.g$. Poté napíšeme podmínku rovnováhy:

$$\text{I.} \quad N_1 + N_2 - mg = 0$$

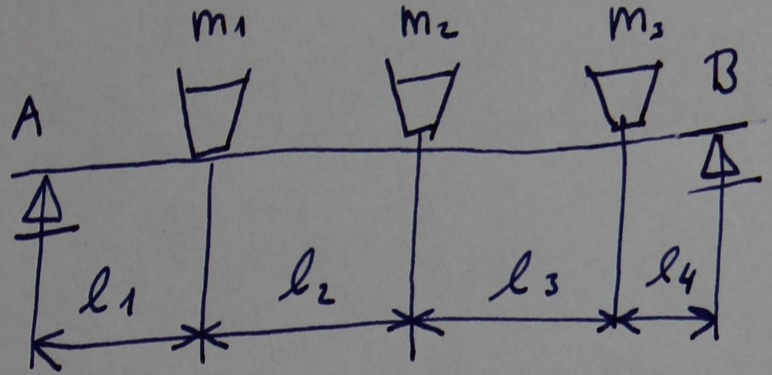
Z této rovnice nelze vypočítat dvě neznámé (N_1; N_2). Mezi podmínky rovnováhy ale patří i fakt, že se člověk neotáčí. Tedy moment k libovolnému bodu (např. A)

$$\text{II.} \quad -1{,}4 \cdot m \cdot g + 1{,}9 \cdot N_2 = 0$$

Z těchto dvou rovnic vypočteme N_1 a N_2

$$N_2 = 736{,}8\,N$$
$$N_1 = 263{,}2\,N$$

Pokud podobný příklad aplikujeme například na poličku s květináči



$m_1 = 0{,}3\ kg$

$m_2 = 0{,}5\ kg$

$m_3 = 0{,}4\ kg$

$l_1 = 20\ cm$

$l_2 = 15\ cm$

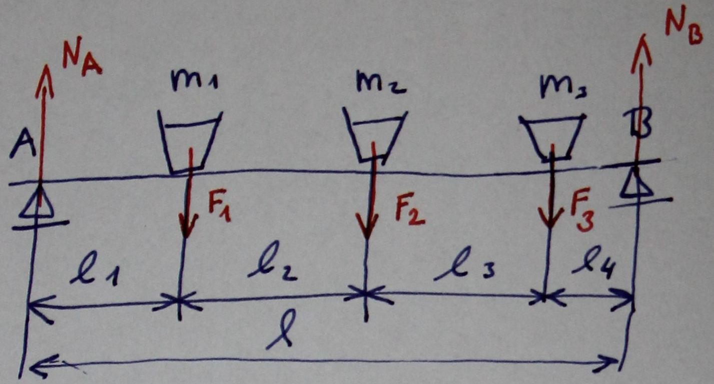
$l_3 = 15\ cm$

$l_4 = 20\ cm$

Jak velká síla tedy působí v místech podpěr A a B ?

Teorie vazeb

Pokud podobný příklad aplikujeme například na poličku s květináči



$m_1 = 0{,}3\ kg$

$m_2 = 0{,}5\ kg$

$m_3 = 0{,}4\ kg$

$l_1 = 20\ cm$

$l_2 = 15\ cm$

$l_3 = 15\ cm$

$l_4 = 20\ cm$

Jak velká síla tedy působí v místech podpěr A a B ?

Podmínky rovnováhy

$$N_A - F_1 - F_2 - F_3 + N_B = 0$$

$$-l_1 F_1 - (l_1 + l_2) F_2 - (l_1 + l_2 + l_3) \cdot F_3 + l \cdot N_B = 0$$

$$N_A - 3 - 5 - 4 + N_B = 0$$

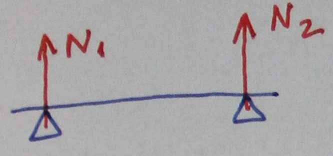
$$-0{,}2 \cdot 3 - 0{,}35 \cdot 5 - 0{,}5 \cdot 4 + 0{,}7 \cdot N_B = 0$$

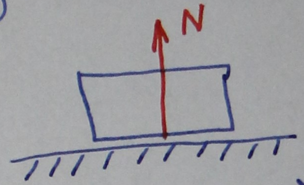
$$N_B = 6{,}21\ N$$

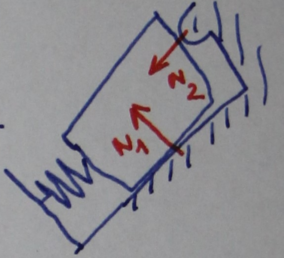
$$N_A = 5{,}79\ N$$

Teorie vazeb

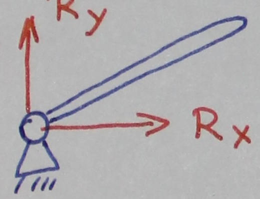
Dosud u všech příkladů bylo těleso vázáno rovinnou nebo bodovou vazbou. Reakce představuje jednu sílu, která jí nahrazuje,



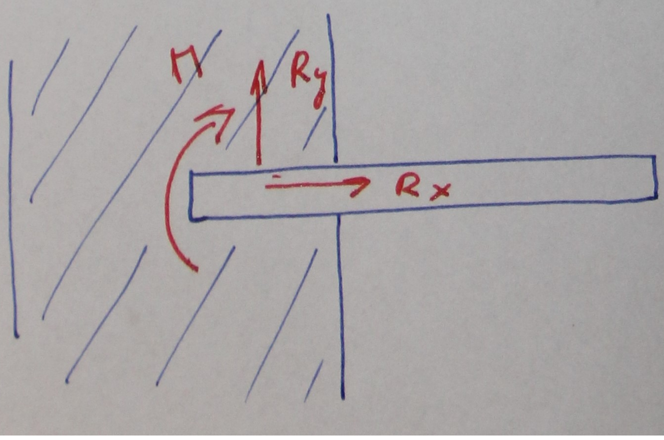




Dalším typem vazby je rotační, která v rovině zabraňuje posunutí v obou směrech (dvě reakce).



Posledním typem vazby je vetknutí, které brání jak rotaci, tak také posunutí. Při rotaci je reakce modelována momentem.

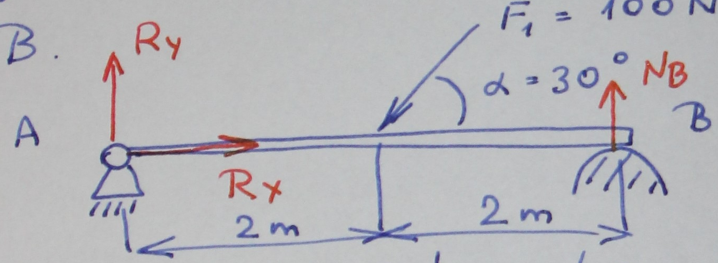


Vazby – příklady 1

Z teorie vazeb tedy vyplývá, jak pomocí reakcí nahradit vzájemné spojení těles.

Příklad

Vypočtěte celkovou reakci v místě A i B.



V místě A je rotační vazba, proto reakce v obou směrech.

Podmínky rovnováhy:

směr x : $R_x - F_1 \cdot \cos\alpha = 0$

směr y : $R_y - F_1 \cdot \sin\alpha + N_B = 0$

Moment k A : $-2 \cdot F_1 \cdot \sin\alpha + 4 \cdot N_B = 0$

Výsledky: $R_x = 86,6$ N

$N_B = 25$ N

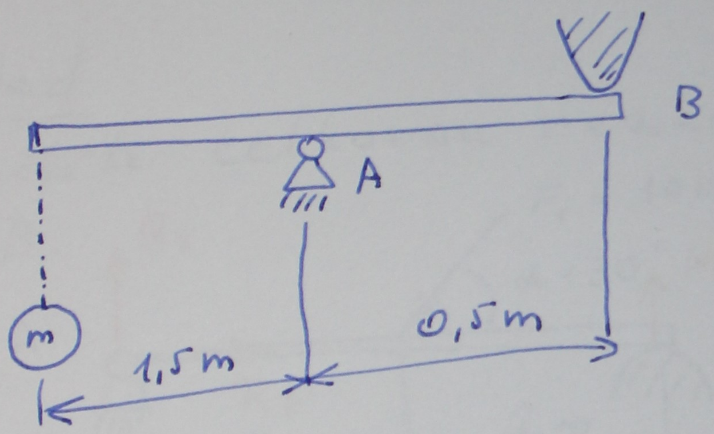
$R_y = 25$ N

Celková síla v místě A:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = 90,1 \text{ N}$$

úkol:

Vypočtěte reakce v místech A a B.

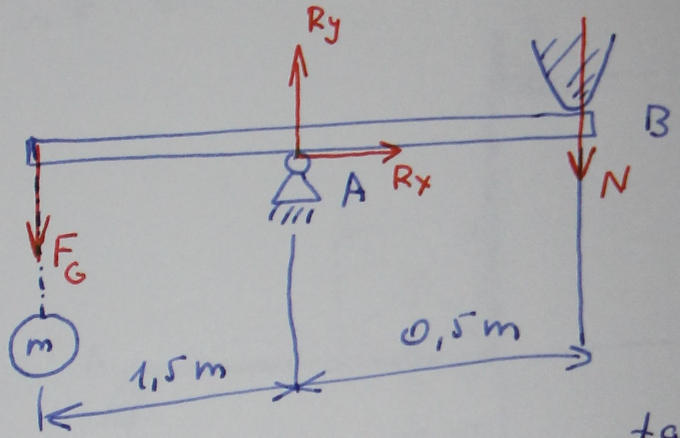


$m = 2\ kg$

$g = 10\ m \cdot s^{-2}$

Vazby – příklady 2

úkol:
Vypočtěte reakce v místech A a B.



$m = 2\ kg$
$g = 10\ m \cdot s^{-2}$

Reakce i síly jsou zaneseny tak, jak působí na zvolené těleso. Pokud by ve výpočtech některá ze sil vyšla záporná, pak to znamená jen tolik, že ve skutečnosti působí opačným směrem, než je zakresleno v obrázku.

$x: \quad R_x = 0$

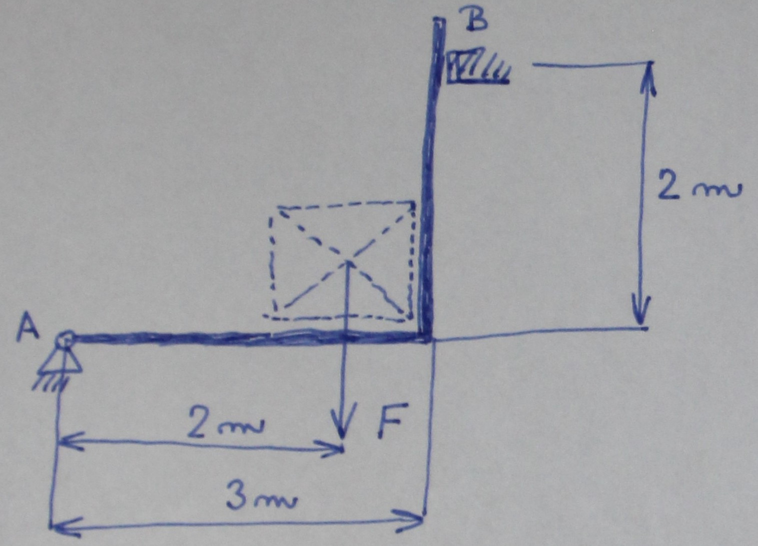
$y: \quad -F_G + R_y - N = 0$

$M_A: \quad -1{,}5 \cdot F_G + 0{,}5 \cdot N = 0$

$N = 60\ N$

$R_y = 80 N$

Podle předchozího příkladu se pokuste vypočítat reakce v místě A a B na těleso viz obrázek.



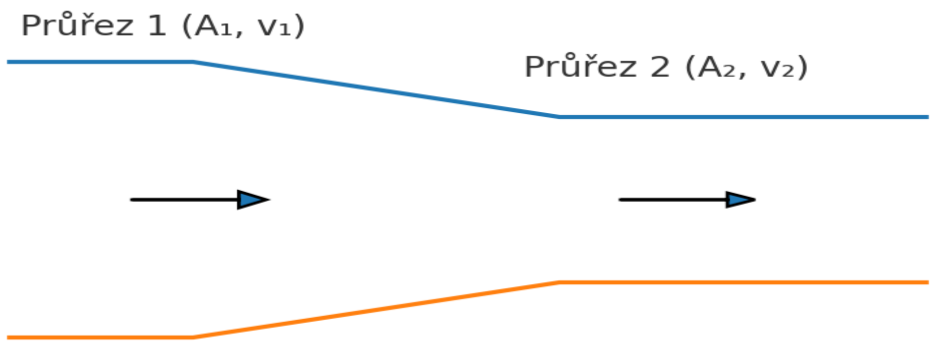
Rovnice kontinuity

Odvození z konstantního objemového průtoku

Uvažujme stacionární proudění nestlačitelné tekutiny v potrubí. Během malého časového intervalu Δt proteče libovolným průřezem potrubí stejný objem tekutiny ΔV. Objemový průtok definujeme jako $Q = \Delta V / \Delta t$. Pro nestlačitelnou tekutinu a stacionární proudění je Q ve všech průřezech stejný (konstantní).

Pro trubici s průřezovou plochou A a střední rychlostí proudění v platí vztah $Q = A \cdot v$. Porovnáme-li dva libovolné průřezy 1 a 2, dostaneme $Q_1 = A_1 \cdot v_1$ a $Q_2 = A_2 \cdot v_2$ a protože $Q_1 = Q_2$, vychází $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$.

Obecnější (diferenciální) tvar zákona zachování hmoty je rovnice kontinuity $\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho\vec{v}) = 0$. Pro nestlačitelné tekutiny (ρ = konst.) se zjednoduší na $\nabla \cdot \vec{v} = 0$.



Výsledný vzorec (pro nestlačitelné stacionární proudění):
$A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = Q$

Příklad:
V potrubí s kruhovým průřezem o průměru $d_1 = 10$ cm proudí voda rychlostí $v_1 = 1{,}8$ $m \cdot s^{-1}$. Potrubí se zúží na průměr $d_2 = 5$ cm. Jaká bude rychlost v užším místě v_2?

Řešení: Pro kruhový průřez je $A = \pi (d/2)^2$, a platí $A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2$, tedy $v_2 = v_1 \cdot (A_1 / A_2) = v_1 \cdot (d_1^2 / d_2^2)$.
Po dosazení: $v_2 = 1{,}8 \cdot (0{,}10^2 / 0{,}05^2) = 1{,}8 \cdot 4 = 7{,}2$ $m \cdot s^{-1}$.

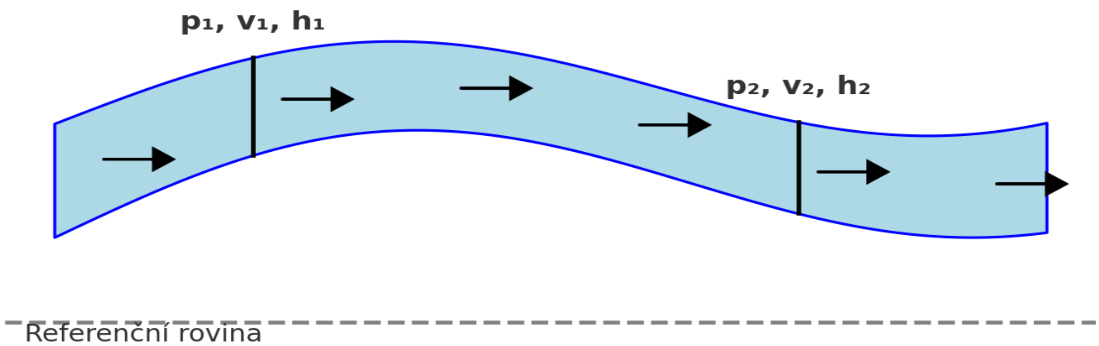
Bernoullliho rovnice – odvození z rovnosti energií

Odvození z rovnosti mechanických energií na objem V

Uvažujme ideální, nestlačitelnou tekutinu ve stacionárním proudění podél jedné proudnice a vyberme si malý objem tekutiny V, který se posune z bodu 1 do bodu 2. Na tento objem se vztahuje zákon zachování mechanické energie:

• Práce tlaku dodaná tekutinou v bodě 1 a spotřebovaná v bodě 2: $W_{tlak} = p_1 \cdot V - p_2 \cdot V$.
• Kinetická energie objemu: $E_{kin} = ½ \cdot m \cdot v^2 = ½ \cdot (\rho \cdot V) \cdot v^2$.
• Potenciální (polohová) energie v tíhovém poli: $E_{pot} = m \cdot g \cdot h = (\rho \cdot V) \cdot g \cdot h$.

Z rovnosti celkové energie mezi body 1 a 2 (přírůstek práce tlaku se přemění na změny kinetické a potenciální energie) dostáváme:
$p_1 \cdot V + ½ \cdot \rho \cdot V \cdot v_1^2 + \rho \cdot V \cdot g \cdot h_1 = p_2 \cdot V + ½ \cdot \rho \cdot V \cdot v_2^2 + \rho \cdot V \cdot g \cdot h_2$.
Všechny členy dělíme objemem V a získáme Bernoullliho rovnici na jednotku objemu:
$p + ½ \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{konst.}$
Pro dva body 1 a 2 na téže proudnici tedy platí:
$p_1 + ½ \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + ½ \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$.



Souhrnný tvar (ideální nestlačitelná tekutina, podél jedné proudnice):
$p + ½ \cdot \rho \cdot v^2 + \rho \cdot g \cdot h = \text{konst.}$
nebo mezi body 1 a 2: $p_1 + ½ \cdot \rho \cdot v_1^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 = p_2 + ½ \cdot \rho \cdot v_2^2 + \rho \cdot g \cdot h_2$.

Ukázkový příklad:
Voda ($\rho = 1000\ kg \cdot m^{-3}$) proudí hadicí která stoupá o $\Delta h = 2\ 0$ m. V bodě 1 je tlak $p_1 = 180$ kPa a rychlost $v_1 = 1\ 5\ m \cdot s^{-1}$. V bodě 2 je průřez menší takže rychlost vzroste

na $v_2 = 3\ 0\ m \cdot s^{-1}$. Určete tlak p_2 (zanedbejte ztráty).

Řešení: Z Bernoulliho rovnice mezi 1 a 2 vyjádříme
$p_2 = p_1 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot (v_2^2 - v_1^2) - \rho \cdot g \cdot \Delta h$.
Dosazení: $p_2 = 180\ 000 - \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot (3\ 0^2 - 1\ 5^2) - 1000 \cdot 9\ 81 \cdot 2\ 0$ Pa $= 157\ 005$ Pa ≈ 157 kPa.
(Tlak v bodě 2 je nižší protože proud zrychlil a bod je výše.)

Obtékání těles a Newtonův vzorec odporu

Základní princip

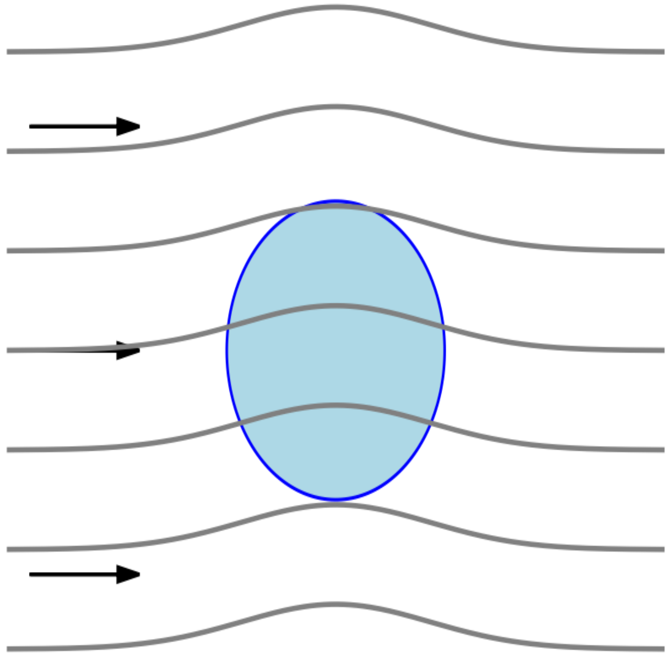
Při obtékání tělesa tekutinou vznikají tlakové a třecí síly působící na jeho povrch. Výsledkem je odporová síla působící proti směru proudění.

Experimentálně i teoreticky se ukazuje, že velikost odporu lze dobře vyjádřit tzv. Newtonovým vzorcem odporu:

$F_D = \frac{1}{2} \cdot C_D \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A$

kde:
- F_D je odporová síla (N),
- C_D je součinitel odporu (bezrozměrná konstanta, závisí na tvaru tělesa a Reynoldsově čísle),
- ρ je hustota tekutiny ($kg \cdot m^{-3}$),
- v je rychlost proudění ($m \cdot s^{-1}$),
- A je čelní plocha tělesa (m^2).

Pro sférické a jednoduché tvary jsou hodnoty C_D tabulkově známé (např. koule ~0,47, krychle ~1,05, deska kolmo k proudu ~1,2).



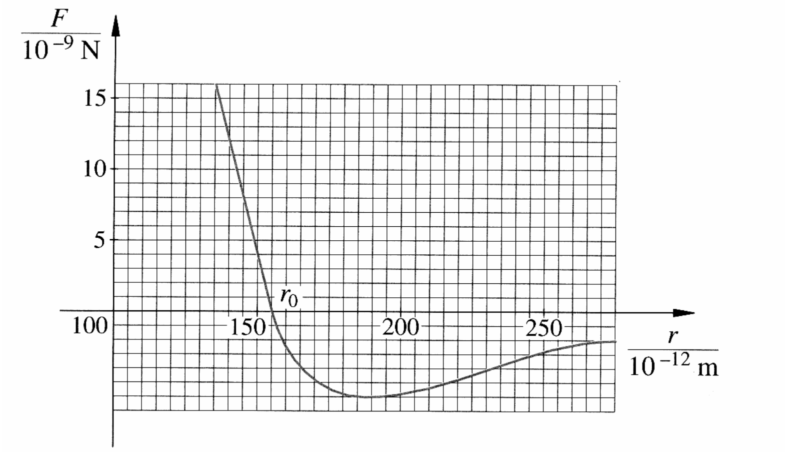
Ukázkový příklad:
Koule o průměru 30 cm je obtékána vzduchem (ρ = 1,2 $kg \cdot m^{-3}$) rychlostí v = 20 $m \cdot s^{-1}$. Určete odporovou sílu působící na kouli. Součinitel odporu koule je C_D = 0,47.

Řešení:
Použijeme Newtonův vzorec odporu: $F_D = ½ \cdot C_D \cdot \rho \cdot v^2 \cdot A$.
Čelní plocha koule: $A = \pi \cdot r^2 = \pi \cdot (0{,}15)^2 = 0.071\ m^2$.
Po dosazení: $F_D = ½ \cdot 0{,}47 \cdot 1{,}2 \cdot 20^2 \cdot 0.071\ N = 8.0\ N$.

Odpověď: Odporová síla je přibližně 8.0 N.

Téma : Vzájemné působení částic, potenciální energie

Částice na sebe navzájem působí silami , které mají svůj základ v elektrické síle. Při malých vzdálenostech je tato síla odpudivá, při větších vzdálenostech přitažlivá. V určitém bodě tak vzniká rovnovážná poloha.



1-8 Graf závislosti velikosti síly působící mezi dvěma atomy uhlíku na jejich vzdálenosti

Všimněme si, že při narůstající vzdálenosti přitažlivá síla velmi rychle klesá. Z toho lze usoudit, že na částici mají vliv pouze další částice pouze v jejím bezprostředním okolí.

Důležitý je také poznatek, že silové působení částic je závislé na jejich vzájemné poloze, tedy částice mají potenciální energii. Soustava částic má tedy vnitřní potenciální energii. Pokud si tedy představíme situaci, kdy částice jsou v rovnovážné poloze a pokud bychom chtěli takovou vzájemnou vazbu rozrušit, museli bychom vykonat práci vnějšími silami, která by byla rovna vazebné energii mezi částicemi.

Stavba molekul

- **dvouatomové ……. lineární**
- **Tříatomové……… lineární nebo rovinné (trojúhelník)**
- **Víceatomové……. Prostorové**

Struktura látek různých skupenství

Plynná látka

- **Molekuly složeny jen z několika atomů**
- **Střední vzdálenost mezi molekulami cca 3nm**
- **Průměr molekuly oproti vzdálenostem je malý (např 0,07nm)**
- **Přitažlivé síly jsou tak zanedbatelné**
- **Plyn tak nemůže vytvořit samostatné těleso určitého tvaru, molekuly konají tepelný pohyb, pohybují se všemi směry velkými rychlostmi**
- **Pohybu molekul je mezi srážkami přibližně přímočarý, při srážce se molekuly k sobě přiblíží na krátkou vzdálenost a poté odpudivými silami změní svůj směr.**
- **Kromě posuvného pohybu konají molekuly také rotační pohyb a k celkové kinetické energii je nutno připočítat také kmitání atomů uvnitř molekul**

Celková hodnota potenciální energie je značně menší, než celková kinetická energie částic téhož plynu.

Pevná látka

- **Pravidelné uspořádání v krystalických mřížkách (mimo amorfní látky – bez pravidelné struktury)**
- **Střední vzdálenosti mezi částicemi 0,2 až 0,3 nm**
- **Tvar i objem tělesa je stálý (bez působení vnějších sil a změny teploty)**
- **Částice kolem svých poloh kmitají, kdy výchylky se zvětšují s teplotou (Před teplotou tání 1/6)**

Celková vnitřní potenciální energie soustavy částic pevného tělesa je větší než celková vnitřní kinetická energie těchto částic.

Kapalná látka

- **Molekuly slabě vzájemně přitahovány**
- **Každá molekula kmitá kolem své polohy**
- **Při působení vnější síly se přesuny molekul převážně odehrávají ve směru síly**

Celková vnitřní potenciální energie soustavy částic je srovnatelná s jejich kinetickou energií.

Ing. Stanislav Šimandl

Téma : Rovnovážný stav soustavy

Makroskopická soustava existuje za určitých vnějších podmínek, které ji ovlivňují. Jedná se hlavně o silové působení, které ovlivňuje například objem celé soustavy.

Soubor podmínek a z nich vyplývajících parametrů a veličin, za kterých daná soustava existuje určuje její **stav**. Z toho důvodu mluvíme o **stavových veličinách**. Některé z těchto veličin jsou na sobě nezávislé, hodnota jiných nějak vyplývá z ostatních parametrů soustavy. Ze stavových veličin tak lze sestavit **stavovou rovnici**, kdy je možné vypočítat jednu veličinu z ostatních parametrů. Příkladem může být vztah mezi objemem, tlakem a teplotou plynu.

Nechť se tedy soustava nachází v určitém stavu, pokud změníme vnější podmínky (například teplotu) , budeme po určitou dobu sledovat změny ostatních stavových veličin až do chvíle, kdy se celá soustava znovu ustálí. Při tomto ustálení mluvíme o stavu **termodynamické rovnováhy**. Tento **rovnovážný stav** je charakterizován tím, že stavové veličiny jsou konstantní, dále se nemění.

Lze si snadno představit, že soustava se při změně vnějších podmínek chová tak, že postupně prochází rovnovážnými stavy až do chvíle, kdy dosáhne konečné rovnováhy. V takovém případě mluvíme o **rovnovážném ději**. Podmínkou ovšem je, že změny probíhají dostatečně pomalu.

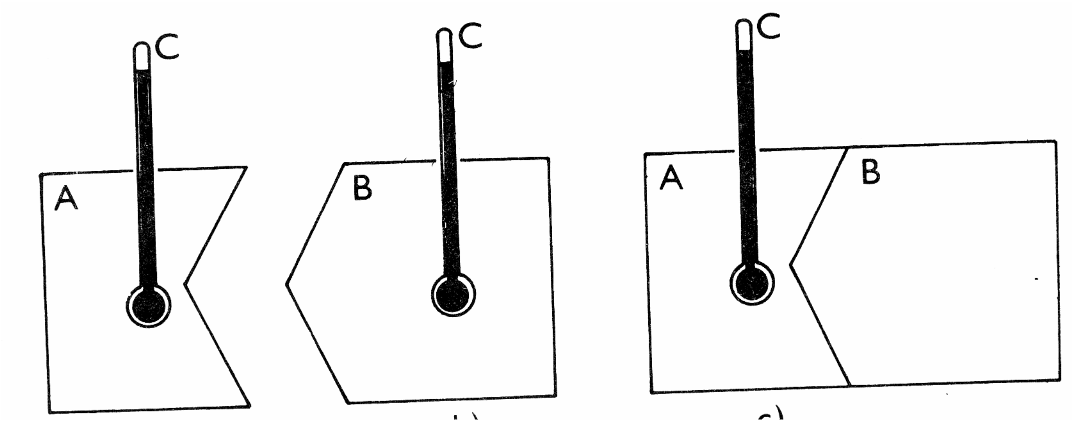
V opačném případě, tedy při rychlé změně vnějších podmínek (rychlé stlačení pístu …) , dojde k **nerovnovážnému ději.**

Pokud se na tento problém budeme dívat z molekulového hlediska, je nutné si uvědomit, že pravděpodobnost situace, kdy nedojde k rovnoměrnému rozdělení částic v nádobě je velmi malá. Tedy za předpokladu, že nedojde ke změně vnějších podmínek. Tak, jak na sebe částice působí přitažlivými a odpudivými silami (viz minulá kapitola), **je nejpravděpodobnějším stavem, při stálých vnějších podmínkách, právě rovnovážný stav**.

Ing. Stanislav Šimandl

Téma : Teplota a její měření

Teplotu lze měřit pomocí teploměru (srovnávací těleso) na základě termodynamické rovnováhy.



<u>Nultý zákon termodynamiky :</u> dvě makroskopické soustavy , z nichž každá je sama o sobě v termodynamické rovnováze s touž třetí makroskopickou soustavou (teploměr) , jsou navzájem v termodynamické rovnováze.

Aplikace známého zákona z matematické logiky (tranzitivní zákon)

$T_A = T_C$ a zároveň $T_B = T_C$, pak platí : $T_A = T_B$

Tělesům, která jsou při vzájemném dotyku v rovnovážném stavu, přiřazujeme stejnou teplotu.

Teploměr musí obsahovat teplotní stupnici.

Stupnice vytvořena mezi dvěma základními teplotami 0°C a 100 °C – Celsiova teplotní stupnice. Takto vytvořený teploměr je bohužel závislý na použité teploměrné látce a veličině, pomocí které teplotu měříme (změna objemu, tlaku, elektrického odporu ….).

Téma : Termodynamická teplota

Východiska :

- **Teplota je intenzivní veličina (kvalita) musíme tedy používat jinou, extenzivní veličinu (kvantitu) , pomocí které budeme teplotu měřit. Takové veličině budeme říkat termodynamická proměnná.**

- **Nejednodušším vztahem mezi teplotou (T) a termodynamickou proměnnou (x) je přímá úměrnost :**

$$T(x) = b * x$$

- **Jako termodynamické proměnné by bylo ideální použít dodané a odevzdané teplo, to je ovšem z mnoha hledisek (např. ztráty) nerealizovatelné. Proto používáme, jako termodynamickou proměnnou, například tlak plynu za konstantního objemu. $x=p$, v_0 = konst.**

- **Vzhledem k použité konstantě b je nutné zvolit nějaký počáteční bod, tím se stal stav , kdy se voda nachází v termodynamické rovnováze ve fázi pevné, kapalné i plynné. Pro tlak 610,61 Pa a základní teplotě T_0 = 273,16.**

Odvození termodynamické stupnice :

Teplota vyjádřená v termodynamické teplotní stupnici se nazývá termodynamická teplota. Značíme ji T. Její jednotkou je kelvin (K).

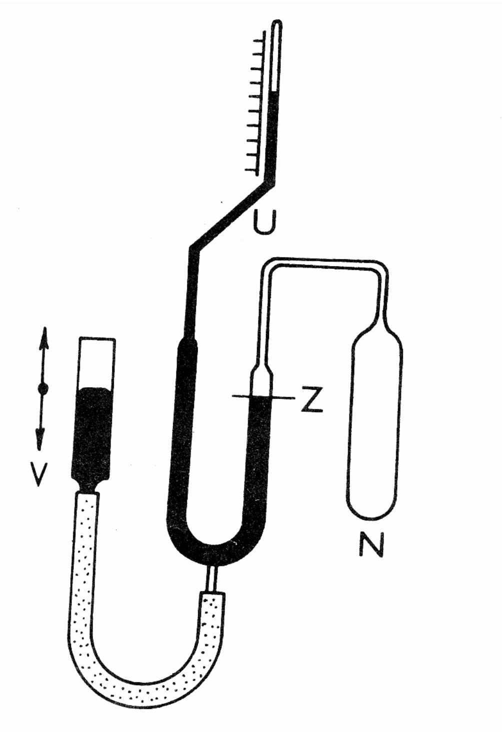
Kelvin je 1/273,16 díl termodynamické teploty trojného bodu vody.

Při použití vztahu : $T(x) = b * x$ **s tím , že x = p a pro základní bod zvolíme T_0 , p_0 musí platit :**

$$T_0 = b * p_0$$

$$b = \frac{T_0}{p_0} \qquad T = \frac{T_0}{p_0} * p$$

Plynový teploměr – teploměrná látka je plyn

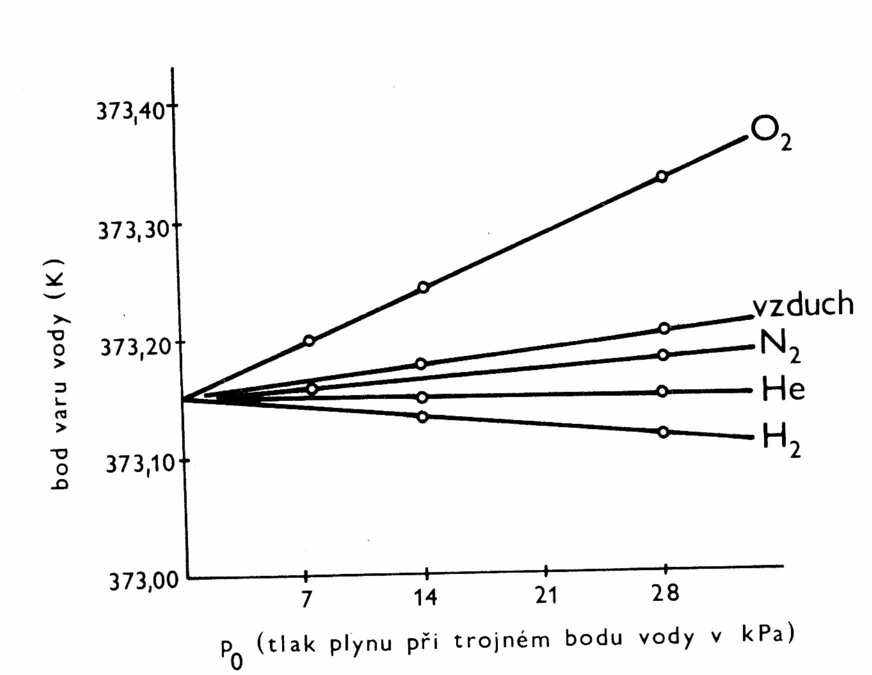


N….nádoba s teploměrným plynem
U…U trubice pro měření teploty (tlaku) s rtutí
V…. nádržka jejímž pohybem hladinu rtuti seřídíme do polohy Z

$$T = 273,16\,K * \frac{p}{p_0}$$

V_0 = konst.
p_0.........tlak plynu při T_0 = 273,16K

Pokud budeme takto různými teploměrnými plyny měřit teplotu varu vody, i zde se budou hodnoty lišit v závislosti na použitém plynu. Pokud ovšem provedeme extrapolaci pro nulový tlak, dostaneme vždy shodnou hodnotu bodu varu vody T = 373,15 K, viz graf :



Zde vidíme, že termodynamická teplota T_0^{TL} je o setinu kelvina nižší, než termodynamická teplota T_0^{TROJ} trojného bodu vody.

Odtud převodní vztahy :

$$t = \left(\{T\} - 273{,}15\right)°C$$
$$T = \left(\{t\} + 273{,}15\right)K$$

Téma: Vnitřní energie tělesa, teplo

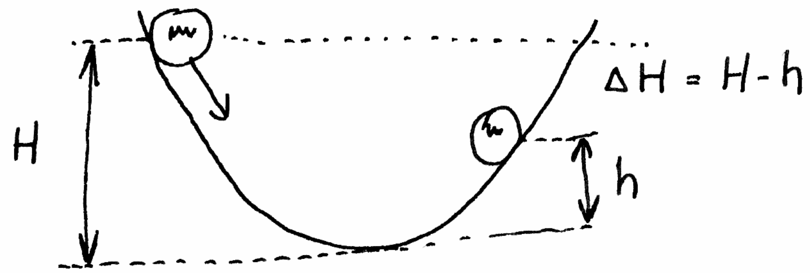
Vnitřní energie tělesa

Již bylo zmíněno , že uvnitř tělesa jsou částice vázány silami závislými na vzájemné vzdálenosti (poloze částic). Při rozrušení takové vazby je nutné vykonat práci vnějšími silami. Mluvíme tedy o vnitřní potenciální energii.

Částice ovšem nejsou v klidu, naopak se neustále neuspořádaně pohybují (kmitavý pohyb, rotace, posuvný pohyb) a to nejen celých částic (molekul), ale také pohyb např. elektronů uvnitř atomů. Jde tedy o energii závislou na pohybu částice uvnitř tělesa – vnitřní kinetická energie.

Vnitřní energií U tělesa budeme nazývat součet celkové vnitřní kinetické energie a vnitřní potenciální energie.

Změna vnitřní energie konáním práce



Na základě zákona zachování energie by mělo platit, že H = h, tak tomu ovšem není. Po uvedení do pohybu z výšky H těleso konalo práci , která se částečně spotřebovala na změnu vnitřní energie (těleso se zahřívalo třením).

Vnitřní energii tělesa lze tedy měnit konáním práce.

Další příklady

- **Tření těles o povrch**
- **Odskoky míče**
- **Změna tvaru těles (lisování, řezání, ohýbání …..)**

Změna vnitřní energie při tepelné výměně

Při tepelné výměně vedením , nebo zářením také dochází ke změně vnitřní energie. Snadno pozorovatelné zahříváním tělesa. Tělesa si tak předávají energii bez konání práce.

Teplo Q je určeno energií , kterou při tepelné výměně odevzdá teplejší těleso studenějšímu. Jednotkou tepla je joule (J).

Měrná tepelná kapacita

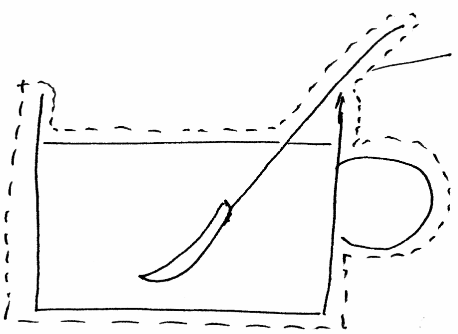
Tepelná kapacita tělesa je definována jako podíl : $C = \dfrac{Q}{\Delta t}$ **, J . K^{-1}**

Měrná tepelná kapacita : $c = \dfrac{C}{m}$ **: J . K^{-1} . kg^{-1}**

Tedy platí : $Q = c.m.\Delta t$

Teplo, které přijme chemicky stejnorodé těleso , je přímo úměrné hmotnosti tělesa a přírůstku teploty.

Kalorimetrická rovnice



Izolovaná soustava

Teplo přijaté = Teplo odevzdané

$$Q_{vody} = Q_{Hrnku} + Q_{lžičky}$$

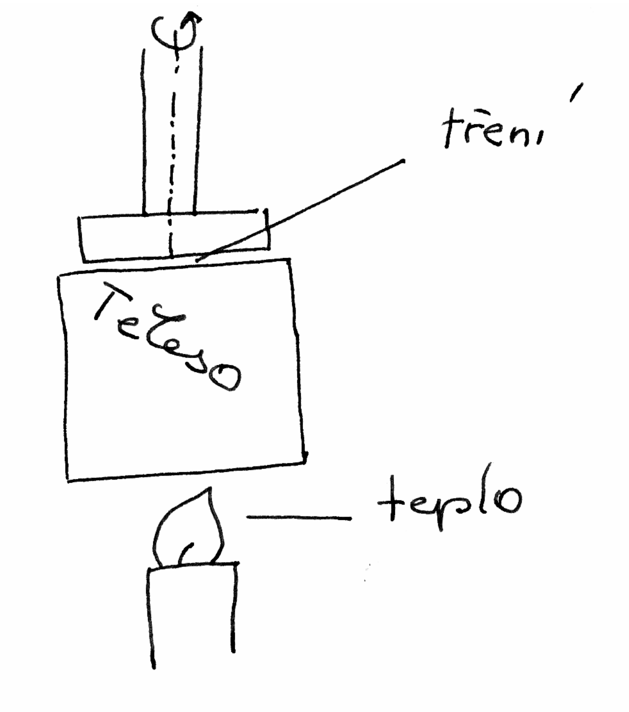
$$c_{H_2O} \cdot m \cdot \Delta t_{H_2O} = C_{HR} \cdot \Delta t_{HR} + C_{LŽ} \cdot \Delta t_{lžičky}$$

$$c_{H_2O} \cdot m \cdot (t_{H_2O} - t_{soust}) = C_{HR} \cdot (t_{soust} - t_{HR}) + C_{LŽ} \cdot (t_{soust} - t_{LŽ})$$

Zopakovat kalorimetr.

Téma: První termodynamický zákon

Z předchozích kapitol vyplývá, že těleso může zvýšit svoji vnitřní energii jednak konáním práce vnějších sil, ale také přijetím tepla. Je tedy možné , použít oba způsoby současně :



V takovém případě lze energetickou bilanci pro takové těleso psát ve tvaru :

$$\Delta U = W + Q$$

Máme tak před sebou <u>PRVNÍ TERMODYNAMICKÝ ZÁKON</u>

Přírůstek vnitřní energie soustavy ΔU se rovná součtu práce W vykonané ostatními tělesy působícími na soustavu silami a tepla Q, odevzdaného okolními tělesy soustavě.

Vzhledem k možnosti, že soustava teplo může přijímat, ale i odevzdávat, ale stejně tak práci vykonávat, či využívat práci okolních sil ke zvyšování vnitřní energie, je nutné zavést znaménkovou konvenci :

+ ....jestliže soustava přijímá energii (konáním práce, nebo přijetím tepla)

- .... Soustava energii odevzdává

Ing. Stanislav Šimandl

Jestliže Q = 0 J , pak první termodynamický zákon přejde na tvar ΔU = W a vnitřní energie se mění pouze díky konání práce. Takovému ději říkáme <u>adiabatický děj.</u>

Jestliže W = 0 J , pak zřejmě platí, že změna vnitřní energie se rovná přijatému (nebo odevzdanému) teplu.

První termodynamický zákon bývá často výhodnější používat v mírně pozměněném tvaru. Je-li v rovnici W práce, kterou síly z okolí vykonají pro zvýšení vnitřní energie tělesa, označme jako W´ príci, kterou naopak vykoná těleso a odevzdá tak energii do okolí. Ze zákona akce a reakce musí platit W = - W´.
Pokud dosadíme do rovnice vyjadřující první termodynamický zákon, určitě platí :

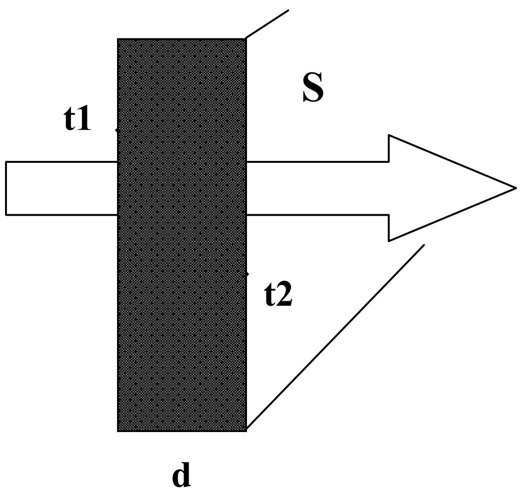
$$Q = \Delta U + W'$$

Rovnici lze interpretovat tak, že dodáme-li soustavě teplo, bude využito na změnu vnitřní energie a vykonání práce.

<u>Přenos vnitřní energie</u>

Opakovat :

- **tepelná výměna vedením**



$$\boxed{Q = \lambda * S * \frac{\Delta t}{d} * \tau}$$

S …..plocha, kterou teplo projde τ….doba Δt….rozdíl teplot λ…. Součinitel tepelné vodivosti [W . m^{-1} . K^{-1}]

- **tepelná výměna zářením – tepelné záření – odvozeno od tepelného pohybu částic**
- **Přenos vnitřní energie prouděním**

Téma: Ideální plyn

- **Rozměry molekul ideálního plynu jsou ve srovnání se střední vzdáleností molekul od sebe zanedbatelně malé**

- **Molekuly ideálního plynu mimo vzájemné srážky na sebe navzájem silově nepůsobí – potenciální energie je nulová**

- **Vzájemné srážky molekul ideálního plynu a srážky těchto molekul se stěnou nádoby jsou dokonale pružné.**

Ing. Stanislav Šimandl

Téma: Látkové množství

1) Atomová hmotnostní jednotka

Srovnávací částicí nejprve atom vodíku, později kyslíku (v chemii přírodní, ve fyzice izotop $^{12}{}_{6}O$. Později došlo ke sjednocení tak, aby srovnávací částice byla co nejpodobnější původnímu atomu vodíku.

Atomová hmotnostní jednotka : $u = \frac{1}{12} M\ {}^{12}_{6}C$ **[kg]**

2) Relativní atomová a molekulová hmotnost

$$A_r = \frac{m_{atomu}}{u}$$ **[číslo]**

$$M_r = \frac{m_{molekuly}}{u}$$ **[číslo]**

3) Avogadrova konstanta (Loschmidt)

Zřejmě musí platit : $\frac{M_1}{M_2} = \frac{N1 * m_{molekuly\ 1}}{N2 * m_{molekuly\ 2}} = \frac{N1 * M_{r1} * u}{N2 * M_{r2} * u}$

Pokud za M1 a M2 dosadíme M_{r1} a M_{r2}, pak musí platit : N1 = N2 = N_A

N_A – Avogadrova konstanta – je číslo, které udává počet atomů v nuklidu uhlíku ${}^{12}_{6}C$ o hmotnosti 0,012 kg.

4) Látkové množství

Podíl počtu částic chemicky stejnorodé látky (atomů, molekul, iontů) N a Avogadrovy konstanty N_A.

$$n = \frac{N}{N_A}$$

[mol] …. 1 kmol je látkové množství, obsahující stejný počet částic (molekul, atomů) , kolik je přesně atomů ve 12 kg izotopů uhlíku ${}^{12}_{6}C$

5) Molární hmotnost

Hmotnost látky M_r kg obsahující N_A částic je hmotnost jednotkového látkového množství a nazývá se molární hmotnost.

$$M_m = \frac{m}{n}$$ **[kg * kmol^{-1}]**

Všimněme si, že platí :

$$n = \frac{N}{N_A} \Rightarrow N = n \cdot N_A$$

$$M_m = \frac{m}{n} \Rightarrow n = \frac{m}{M_m}$$

$$\boxed{N = \frac{m}{M_m} \cdot N_A}$$

$$N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}\ \mathrm{kmol}^{-1}$$

6) Molární objem

Lze psát ………… $V_m = \frac{V}{n}$ **[m^3 * kmol^{-1}]**

Poznámka : Při teplotě 0°C a tlaku 101,325 kPa se molární objem plynů nazává normální molární objem a je pro všechny plyny konstantní :
V_{mn} = 22,414 * 10^{-3} m^3 * mol^{-1}.

7) Hustota částic

$$N_V = \frac{N}{V}$$ **[m^{-3}]**

Téma: Střední kvadratická rychlost

Celková energie N částic při tepelném pohybu je dána : $E_k = \frac{1}{2} m_0 \left(N_1 v_1^2 + ...N_i v_i^2 \right)$

Ze vzorce lze definovat střední kvadratickou rychlost molekuly :

$$E_k = N \frac{1}{2} m_0 v_k^2 \qquad E_k = \frac{1}{2} m_0 * \sum_{i=1}^{N} N_i * v_i^2$$

$$v_k^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} N_i * v_i^2}{N}$$

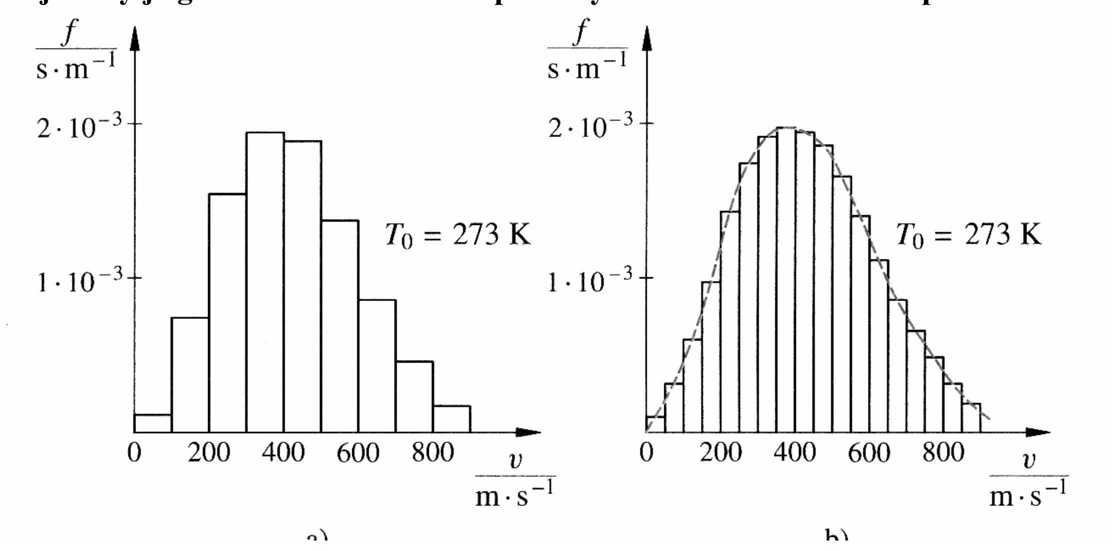
Druhá mocnina střední kvadratické rychlosti je rovna součtu druhých mocnin rychlostí všech molekul děleným jejich počtem.

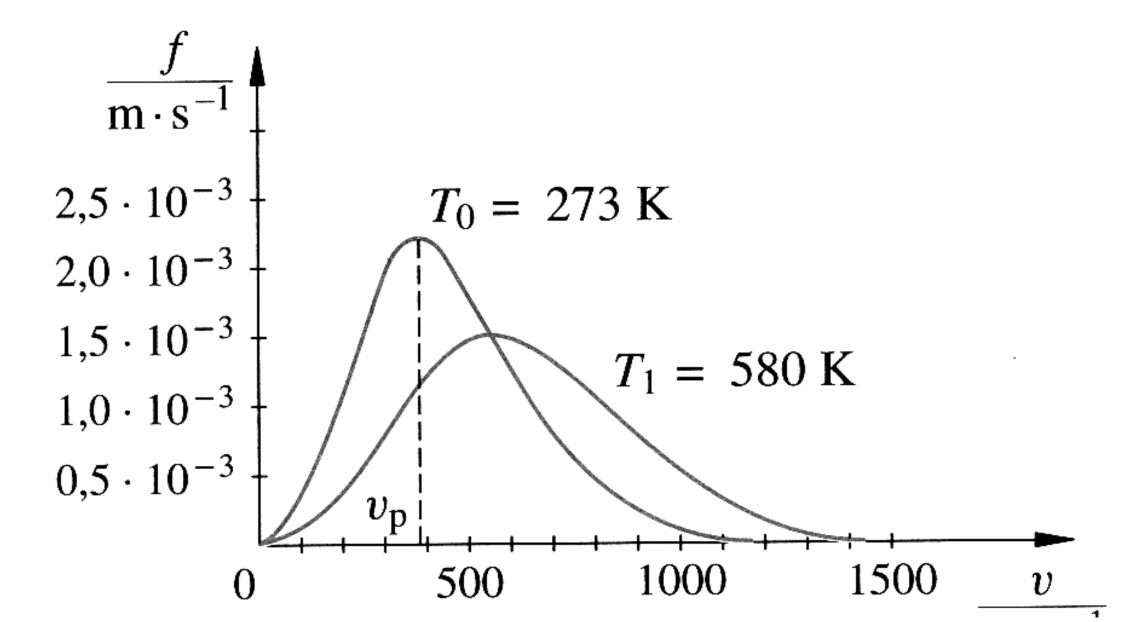
<u>Střední rychlost molekul</u>

Jestliže se každá molekula může pohybovat různou rychlostí, pak lze jistě obecně napsat pro střední rychlost :

$$\overline{v} = \sum f_i * v_i \qquad f_i = \frac{N_i}{N}$$ **relativní četnost výskytu**

Zajímavý je graf rozdělení molekul podle rychlosti v souvislosti s teplotou :




f / m · s⁻¹
2,5 · 10⁻³
2,0 · 10⁻³
1,5 · 10⁻³
1,0 · 10⁻³
0,5 · 10⁻³
T0 = 273 K
T1 = 580 K
vp
0
500
1000
1500
v

Téma : Stavová rovnice ideálního plynu

Pokud vzpomeneme na princip činnosti plynového teploměru, pak lze psát
Gay-Lussacův zákon :

Plyny se rozpínají stejně , a to nezávisle na objemu, je-li objem během rozpínání stálý.

$$T = T_0 \cdot \frac{p}{p_0} \quad \text{, V = konst.}$$

Tento zákon ovšem také říká, že :
Plyny se roztahují stejně, a to nezávisle na tlaku , je-li tlak během roztahování stejný.

$$T = T_0 \cdot \frac{V}{V_0} \quad \text{, p = konst.}$$

Pokud do našich úvah přidáme ještě zákon Boylův – Mariottův :

Tlak plynu je za stálé teploty nepřímo úměrný jeho objemu.

$$p = \frac{konst}{V} \Rightarrow pV = konst \quad \text{, T = konst.}$$

Představme si nyní změny, které probíhají v plynu z hodnot T_0 , p_0 , V_0 na hodnoty T, p , V a to tak , že nejprve :

Při konstantním tlaku :

$$p_0 = konst \;, T_0 \rightarrow T , V_0 \rightarrow x \text{ , tedy : } x = \frac{V_0}{T_0} \cdot T$$

Potom při konstantní teplotě :

$$T = konst \;, p_0 \rightarrow p , x \rightarrow V \text{ , tedy : } p_0 \cdot x = p \cdot V$$

Spojíme-li oba vztahy dohromady, získáváme stavovou rovnici ideálního plynu :

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = konst \quad .$$

Pojďme v úvahách ještě dál :

Molární objem ………………….. $V_m = \frac{V}{n}$

Objemová hustota částic ……….. $n_V = \frac{N}{V}$

Molární objem ……………… $V_m = \frac{N_A}{n_V}$

Pro molární objem platí :

Ve stejných objemech plynů je za stejné teploty a stejného tlaku stejný počet molekul.

Hustota molekul při stejném tlaku a teplotě stejná.

Molární objem V_m všech ideálních plynů je při stejném tlaku a stejné teplotě stejně veliký.

Pak stačí stanovit normální podmínky :

Teplota T_0 = 237,15 K , p_0 = 1,01325 . 10^5 Pa , při těchto hodnotách je :

$V_{m,0}$ = 22,414 m^3 . $kmol^{-1}$, $n_{V,0}$ = 2,69 . 10^{25} m^{-3}

Pokud tedy stavovou rovnici napíšeme ve tvaru :

$$\frac{pV_m}{T} = \frac{p_0 V_{m0}}{T_0}$$

lze pravou stranu vyčíslit a získáváme tzv. **molární plynovou konstantu (univerzální plynová konstanta)** R_m = 8,3144 $J.mol^{-1}.K^{-1}$

Stavovou rovnici pak lze psát ve tvarech :

$p.V_m = R_m . T$

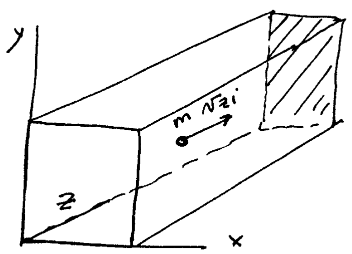
$p.V = n . R_m . T$

a protože $n = \frac{m}{M_m}$, lze též napsat : $p.V = \frac{m}{M_m}.R_m.T$

Téma : Tlak plynu, Boltzmannova konstanta

Opakování : Časová změna hybnosti je přímo úměrná působící síle ; hybnost součin hmotnosti a rychlosti.

Představme si molekuly, která narazí na stěnu nádoby :



před nárazem : $p_{př\,z_i} = m \cdot v_{z_i}$

po nárazu : $p_{po\,z_i} = -m \cdot v_{z_i}$

změna hybnosti $\Delta p_{z_i} = p_{př\,z} - p_{po\,z}$

$$\Delta p_{z_i} = 2 \cdot m \cdot v_{z_i}$$

Molekula urazí délku $2 l_z$ rychlostí v_{z_i} (než znovu narazí na tutéž stěnu)

$$\Delta t_i = \frac{2 l_z}{v_{z_i}}$$

odtud síla, kterou působí jedna molekula na stěnu nádoby

$$\frac{\Delta p_{z_i}}{\Delta t_i} = F_{z_i} \Rightarrow F_{z_i} = \frac{2 m v_{z_i}}{\frac{2 l_z}{v_{z_i}}}$$

$$F_{z_i} = \frac{m \cdot v_{z_i}^2}{l_z}$$

Pro N částic

$$F_z = \frac{m}{l_z} \cdot \sum_{i=1}^{N} v_{z_i}^2$$

Tlak na stěnu této nádoby: $p = \frac{F_{z_i}}{l_x \cdot l_y}$

$$p = \frac{m}{V} \cdot \sum_{i=1}^{N} v_{z_i}^2$$

Při stavu rovnováhy nemá žádný směr přednost:

$$p \cdot V = m \cdot \sum_{i=1}^{N} v_{z_i}^2$$

$$p \cdot V = m \cdot \sum v_{x_i}^2$$

$$p \cdot V = m \cdot \sum v_{y_i}^2$$

$$3 \cdot p \cdot V = m \cdot \sum v_i^2$$

poznámka:

Energie plynu: $W = \frac{1}{2} m \cdot \sum v_i^2$

$$\boxed{p \cdot V = \frac{2}{3} W}$$

Pro molární objem a molární vnitřní energii:

$$p \cdot V_m = \frac{2}{3} U_m$$

platí také: $U_m = \frac{1}{2} M_m \cdot \overline{v^2}$

nebo také: $U_m = N_A \cdot \overline{\varepsilon}$

$$p \cdot V_m = \frac{2}{3} \cdot U_m = \frac{2}{3} \cdot N_A \cdot \overline{\varepsilon} = \frac{1}{3} M_m \overline{v^2} = R_m \cdot T$$

zajímavé vztahy:

$$U_m = \frac{3}{2} R_m \cdot T$$

$$\overline{v^2} = 3 \cdot \frac{R_m}{M_m} T = \frac{3 \cdot R_m \cdot T}{N_A \cdot m}$$

k

k .. Boltzmanova konstanta

$1{,}38 \cdot 10^{-26}\ kJ \cdot K^{-1}$

Platí tedy:

$$\boxed{\overline{v^2} = \frac{3kT}{m}} \qquad \boxed{\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2} m \overline{v^2} = \frac{3}{2} k \cdot T}$$

Poznámka $\frac{3}{2}$ ... jednoatomový plyn

$\frac{5}{2} kT$ ... dvouatomová molekula

$\frac{6}{2} k \cdot T$ ... víceatomový plyn.

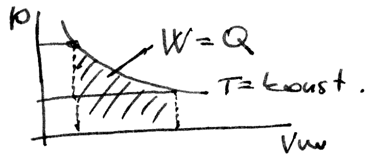
Stavové změny ideálního plynu energetické hledisko

Izotermický děj

$T = konst. \Rightarrow \Delta U = 0$

Pokud platí $Q = \Delta U + W' \Rightarrow Q = W'$

Teplo přijaté ideálním plynem se využije na vykonání práce.



Izochorický děj

$V = konst. \Rightarrow W' = 0$

c_V... měrná tepelná kapacita při stálém objemu

$$\boxed{Q_V = c_V \cdot m \cdot \Delta T}$$

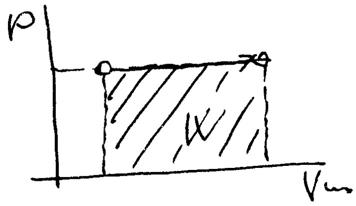
$Q_V = \Delta U$

Teplo přijaté ideálním plynem při izochorickém ději se rovná přírůstku jeho vnitřní energie

Izobarický děj

$p = konst.$

$$\boxed{Q_p = c_p \cdot m \cdot \Delta T}$$



$$Q_p = \Delta U + W'$$

Teplo přijaté ideálním plynem při izobarickém ději se rovná součtu přírůstku jeho vnitřní energie ΔU a práce W', kterou plyn vykoná

Adiabatická změna

$$\Delta Q = 0$$

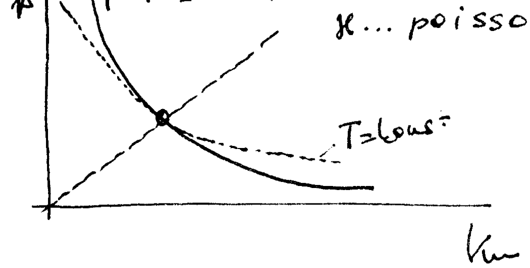
$$0 = \Delta U + W' \Rightarrow -\Delta U = W'$$

$$\Delta U = W$$

změna vnitřní energie pouze vykonáním práce

$p \cdot V^{\varkappa} = konst.$ => adiabata

$\varkappa$ ... poissonova konstanta



Poznámka

$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$

$c_p > c_v$ .. $\varkappa > 1$

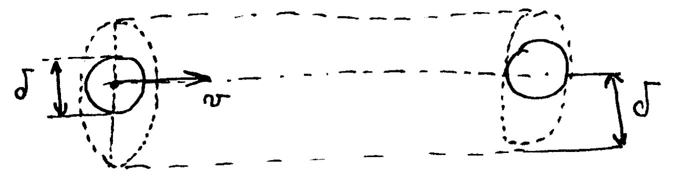
jednoat. plyn $\varkappa \doteq \frac{5}{3}$

dvouat plyn $\varkappa \doteq \frac{7}{5}$

Plyn při nízkém a vysokém tlaku

* volná dráha molekuly l => vzdálenost mezi srážkami
* střední volná dráha molekuly λ
* střední srážková frekvence molekul z

POZNÁMKA K ODVOZENÍ



Při pohybu molekula zasáhne prostor: $\pi d^2 \cdot v_{1\text{-}2\,\text{vzájemná}}$

Pro počet srážek platí $z' = \pi \cdot d^2 \cdot n_V \cdot \bar{v}_{1\text{-}2\,\text{vzájemná}}$

částice se pohybují proti sobě vzájemně:

rychlost $\bar{v}^2 = 2 \cdot \bar{v}_1^2$

$$\bar{v} = \sqrt{2} \cdot \bar{v}_1$$

$$\boxed{\bar{z} = \sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n_V \cdot \bar{v}}$$

$$\boxed{\lambda = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \pi \cdot d^2 \cdot n_V}}$$

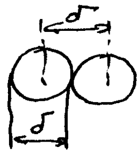
VAN DER WAALS (1837 – 1923)

Rovnice (stavová) pro ideální plyn:

$$p \cdot V_m = R_m \cdot T$$

Korekce pro skutečný plyn.

1) Molekula má vlastní objem



$V_m - \omega$

$\omega = \frac{4}{3}\pi\sigma^3$

Při N_A molekulách změna

pouze o $\frac{1}{2}N_A \cdot \omega \Rightarrow \underline{b} = \frac{N_A}{2} \cdot \omega = \underline{\frac{2}{3}N_A \cdot \pi \cdot \sigma^3}$

2) Molekuly na sebe působí silami (koheze)

– kohezní síla → kohezní tlak ⇒ zvýšení tlaku

o $p_k = \frac{a}{V_m^2}$ $\left(p_k = k \cdot n_V^2 \; ; \; n_V = \frac{N_A}{V_m} \right)$

STAV. ROVNICE:

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right) \cdot \left(V_m - b\right) = R_m \cdot T$$

a, b ... konstanty

Téma : Řešení příkladů

3.1 / 6

Kolik atomů obsahuje krychlička olova o hmotnosti 500 g?

m = 500 g = 0,5 kg, Pb: $A_r = 207$, $m_u = 1{,}66 \cdot 10^{-27}$ kg; N = ?

$A_r = m_A / m_u$ $\quad m = N{*}m_A$

$$N = \frac{m}{A_r m_u} = 1{,}45 \cdot 10^{24}$$

3.1 / 8

Jaké je látkové množství n oxidu uhličitého CO_2 o hmotnosti l kg?

CO_2: m = 1 kg, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}; n = ?

$$n = \frac{m}{M_m}$$

Pro CO_2 je $M_m = 44 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, tedy n = 22,7 mol.

3.1 / 14

Z povrchu kapky benzinu o objemu 10 mm^3 se vypaří za dobu 1 s průměrně 10^{18} částic. Za jakou dobu se vypaří celá kapka? Předpokládáme, že hustota benzinu je 700 kg · m^{-3} a jeho molární hmotnost 108 g · mol^{-1}.

V = 10 mm^3 = $1 \cdot 10^{-8}$ m^3, t_0 = 1 s, $N_0 = 1 \cdot 10^{18}$, ρ = 700 kg · m^{-3},

M_m = 108 g · mol^{-1} = 0,108 kg · mol^{-1}, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ mol^{-1}; t = ?

$m = \rho . V \qquad n = \dfrac{m}{M_m} \qquad N = N_A \,.\, n$

$$t = \frac{\rho V N_A}{M_m N_0} t_0 = 39 \text{ s}$$

3.2 / 35

Dvě koule se pohybují proti sobě po téže přímce stejně velkými rychlostmi 2 m · s^{-1}. Hmotnost jedné koule je 4 kg, hmotnost druhé je 1 kg. Po nepružné srážce se obě koule pohybují společně. Určete jejich rychlost po srážce a přírůstek jejich vnitřní energie při srážce.

$v_1 = v_2 = 2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$, $m_1 = 4$ kg, $m_2 = 1$ kg; $v = ?$, $\Delta U = ?$

$v = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 1{,}2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ ve směru pohybu koule s větší hmotností.

$\Delta U = \Delta E_k = \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \dfrac{1}{2} m_2 v_2^2 - \dfrac{1}{2}(m_1 + m_2) v^2 = 6{,}4\ \mathrm{J}$

3.2 / 54

Při adiabatickém rozepnutí plynu vykonal plyn práci 0,6 kJ. O jakou hodnotu se změnila vnitřní energie plynu? Jak se změnila teplota plynu?

$W = 0{,}6$ kJ; $\Delta U = ?$

$\Delta U = -W = -0{,}6$ kJ; práce se koná na úkor vnitřní energie, vnitřní energie se zmenší a zmenší se také teplota plynu.

3.2 / 61

Určete teplo, které projde za jednu hodinu plochou o obsahu 1 m^2 cihlové stěny o tloušťce 0,5 m, jestliže vnitřní povrch stěny má teplotu 18 °C, vnější povrch má teplotu –2 °C. Součinitel tepelné vodivosti stěny má hodnotu 0,84 W · m^{-1} · K^{-1}.

$\tau = 1\ \mathrm{h} = 3\,600\ \mathrm{s}$, $S = 1\ \mathrm{m^2}$, $d = 0{,}5$ m, $t_1 = 18$ °C, $t_2 = -2$ °C, $\lambda = 0{,}84\ \mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$; $Q = ?$

$Q = \lambda S \tau \dfrac{t_1 - t_2}{d} = 1{,}2 \cdot 10^5\ \mathrm{J} = 120\ \mathrm{kJ}$

Téma : Řešení příkladů 2

3.3 / 71 Vypočtěte počet molekul vodíku H_2 v objemu 1 cm^3, je-li jeho tlak $2{,}6 \cdot 10^4$ Pa a střední kvadratická rychlost molekul plynu je 2 400 m · s^{-1}.

H_2: $V = 1$ cm^3 $= 1 \cdot 10^{-6}$ m^3, $p = 2{,}6 \cdot 10^4$ Pa, $v_k = 2\,400$ m · s^{-1}; $m_u = 1{,}66 \,.\, 10^{-27}$ kg, $N = ?$

$$p = \frac{1}{3} N_V m_m v_k^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V} M_r m_u v_k^2,$$

pro H_2 je $M_r = 2$; počet molekul

$$N = \frac{3Vp}{M_r m_u v_k^2} = 4{,}1 \cdot 10^{18}.$$

3.3. / 72

Určete střední kvadratickou rychlost vodní kapky o poloměru 10^{-8} m, vznášející se ve vzduchu při teplotě 17 °C.

$r = 1 \cdot 10^{-8}$ m, $\rho = 1\,000$ kg · m^{-3}, $t = 17$ °C, $T = 290$ K; k $= 1{,}38 \,.\, 10^{-23}$J.K^{-1} ; vk = ?

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$m = V\rho = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$v_k = \sqrt{\frac{3kT}{\frac{4}{3}\pi r^3 \rho}} = 1{,}7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

3.3. / 74

V nádobě o objemu 2,0 l je $6 \cdot 10^{20}$ molekul plynu. Tlak plynu je $2{,}6 \cdot 10^3$ Pa. Jaká je jeho teplota?

$V = 2$ litry $= 2 \cdot 10^{-3}$ m^3, $N = 6 \cdot 10^{20}$, $p = 2{,}6 \cdot 10^3$ Pa; $T = ?$

$$p = N_V kT = \frac{N}{V}kT,\ T = \frac{pV}{Nk} = 628\ \text{K},\ t = 355\ °\text{C}$$

3.3. / 80

Stlačený plyn v tlakové láhvi má při teplotě 18 °C tlak 8,5 MPa. Jaký tlak bude mít, sníží-li se teplota na –23 °C? Změnu objemu tlakové láhve při ochlazení zanedbejte.

$t_1 = 18$ °C, $T_1 = 291$ K, $t_2 = -23$ °C, $T_2 = 250$ K, $p_1 = 8{,}5$ MPa, $V =$ konst.; $p_2 = ?$

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T_2} \Rightarrow p_2 = p_1\frac{T_2}{T_1} = 7{,}3\ \text{MPa}$$

3.3. / 83

Určete tlak kyslíku O_2 o hmotnosti 4 kg, uzavřeného v nádobě o objemu 2 m^3 při teplotě 27 °C.

O_2: $M_m = 32 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $m = 4$ kg, $V = 2$ m^3, $t = 27$ °C, $T = 300$ K, $R_m = 8{,}31$ J · K^{-1} · mol^{-1}; $p = ?$

$$pV = \frac{m}{M_m}R_m T \Rightarrow p = \frac{mR_m T}{VM_m} = 1{,}6 \cdot 10^5\ \text{Pa}$$

3.3. / 89

Tlaková láhev obsahuje stlačený plyn o teplotě 27 °C a tlaku 4 MPa. Jaký bude tlak v láhvi, jestliže polovinu plynu vypustíme a jeho teplota přitom klesne na 12 °C?

$t_1 = 27$ °C, $T_1 = 300$ K, $p_1 = 4$ MPa $= 4 \cdot 10^6$ Pa, $t_2 = 12$ °C $= 285$ K, $m_2 = m_1/2$; $p_2 = ?$

$$p_1 V = \frac{m_1}{M_m} R_m T_1$$

$$p_2 V = \frac{m_2}{M_m} R_m T_2 = \frac{m_1}{2M_m} R_m T_2$$

Dělením obou rovnic dostaneme

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{2T_1}{T_2} \text{ a odtud } p_2 = p_1 \frac{T_2}{2T_1} = 1{,}9 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 1{,}6 \text{ MPa.}$$

3.3. / 94

Kyslík O_2 o hmotnosti 0,32 kg je zahříván za stálého tlaku z počáteční teploty –23 °C. Určete teplo, které musíme plynu dodat, aby jeho objem vzrostl na trojnásobek počáteční hodnoty

O_2: $m = 0{,}32$ kg, $t_1 = -23$ °C, $T_1 = 250$ K, $V_2 = 3V_1$, $c_p = 0{,}91$ kJ $\cdot$ kg^{-1} $\cdot$ K^{-1}; $Q = ?$

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

$T_2 = 3T_1 = 750$ K

$T_2 - T_1 = 500$ K

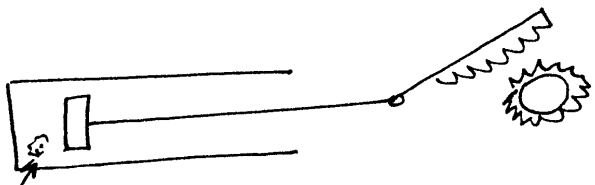
Dodané teplo

$Q = mc_p(T_2 - T_1) = 146$ kJ.

Kruhový děj

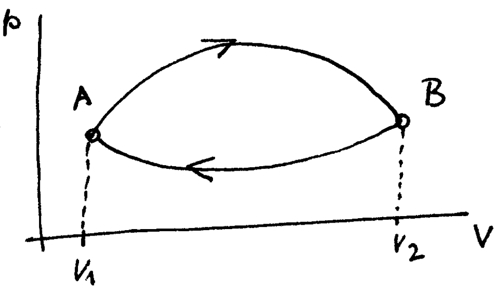
z čeho vycházíme:

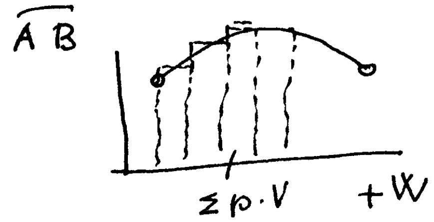
Dělo .....

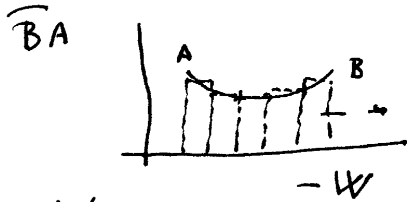


nebyl uzavřený cyklus → zvenčí bylo nutné ochlazovat

Představa kruhového děje







obsah plochy uvnitř křivky zobrazující v p-V diagramu kruhový děj znázorňuje celkovou práci vykonanou pracovní látkou během jednoho cyklu.

2)

Celková změna vnitřní energie pracovní látky po ukončení jednoho cyklu je nulová. Během pracovního cyklu, tedy pracovní látka teplo přijímá ohřívač a odevzdává → chladič

Pokud platí 1. ter. zákon

$$Q = \Delta U + W$$

a zároveň $\Delta U = 0$

$$Q = Q_1 - Q_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow W = Q_1 - Q_2$$

Q_1 ... látkou přijaté teplo

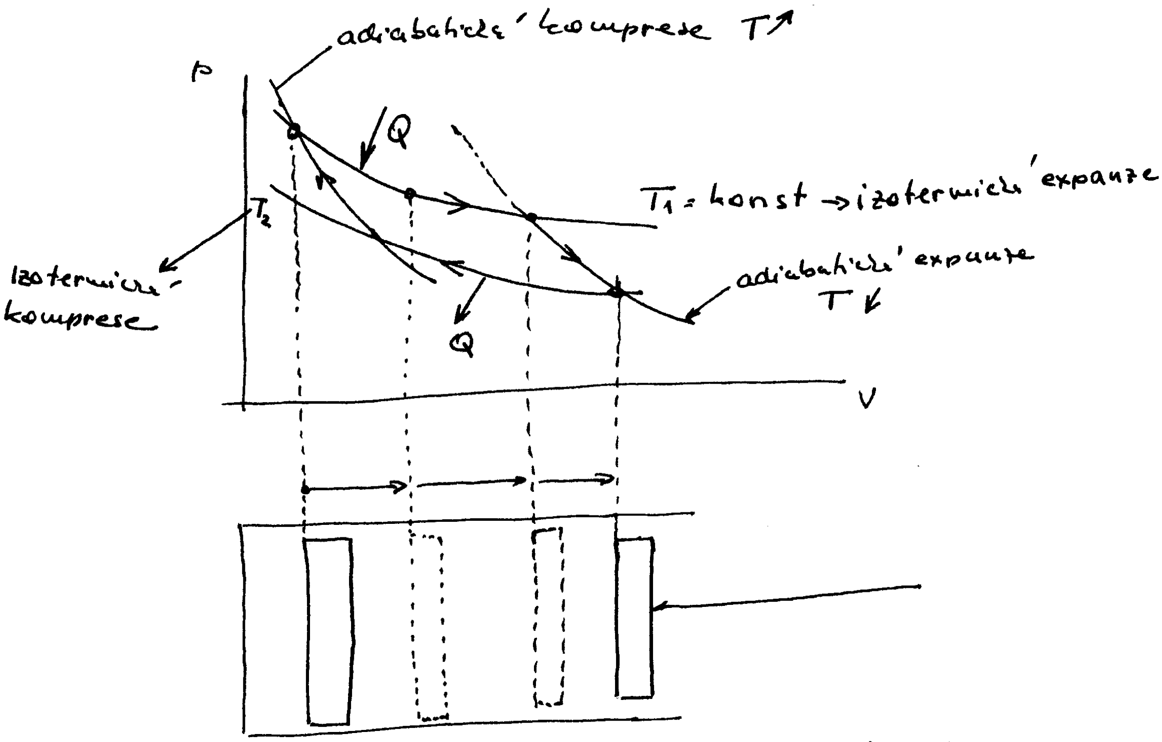
$$\eta = \frac{W}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Druhý termodynamický zákon

Není možné sestrojit periodický pracující stroj (tepelný), který by jen přijímal teplo od určitého tělesa a vykonával stejně velkou práci

3)

SADI CARNOT (1796 – 1832)



Celý cyklus probíhá mezi teplotami T_1 a T_2

$$\eta_{max} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

Sadi Carnot syn napoleonského ministra války, také on sloužil v armádě. Působil jako vojenský inženýr → spoluzakladatel termodynamiky → → úvahy o hybné síle ohně

zemřel roku 1832 na choleru (36 let).

Téma : Řešení příkladů

3.3./97

Vodík H_2 o hmotnosti 70 g byl zahříván z počáteční teploty 27 °C při stálém tlaku 2 · 10^5 Pa tak, že se jeho objem zdvojnásobil. Určete a) počáteční objem vodíku, b) teplo dodané plynu při zahřívání, c) práci, kterou plyn vykonal.

H_2: $M_m = 2 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $m = 70$ g = 0,070 kg, $t_1 = 27$ °C, $T_1 = 300$ K, $V_2 = 2V_1$, $p = 2 \cdot 10^5$ Pa, $c_p = 14{,}2$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}, $c_V = 10{,}1$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}; a) V_1 = ?, b) Q = ?, c) W = ?

a) $p_1V_1 = \dfrac{m}{M_m} R_m T_1 \Rightarrow V_1 = \dfrac{mR_m T_1}{pM_m} = 0{,}44\ \mathrm{m}^3$

b) $Q = mc_p(T_2 - T_1)$

$V_2 = 2V_1 \Rightarrow T_2 = 2T_1$, tedy $T_2 - T_1 = T_1$.

Teplo $Q = mc_pT_1 \approx 300$ kJ.

c) $W = p(V_2 - V_1) = pV_1 = \dfrac{mR_m T_1}{M_m} = 87 \cdot 10^3\ \mathrm{J} = 87\ \mathrm{kJ}$

3.3. / 100

Jak se změní vnitřní energie kyslíku O_2 o hmotnosti 0,10 kg při zahřátí z teploty 10 °C na teplotu 60 °C, proběhne-li zahřívání a) dodáním tepla při konstantním objemu, b) dodáním tepla při konstantním tlaku, c) adiabatickým stlačením plynu?

O_2: $m = 0{,}10$ kg, $t_1 = 10$ °C, $t_2 = 60$ °C, $c_V = 0{,}65$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}, a) V = konst.; ΔU = ?,
b) p = konst.; ΔU = ?, c) $Q = 0$; ΔU = ?

Vnitřní energie závisí na teplotě. Ve všech případech se zvýší o $\Delta U = mc_V(t_2 - t_1) = 3{,}25$ kJ.

V případě a) se spotřebuje všechno dodané teplo na zvýšení vnitřní energie, v případě b) se část tepla spotřebuje na práci, kterou plyn vykoná, v případě c) se zvýši vnitřní energie o práci, která je plynu stlačením dodána.

3.3 / 96

Určete přírůstek vnitřní energie argonu, zvětší-li se jeho objem z 5 l na 10 l za stálého tlaku 2 · 10^5 Pa.

Ar: $M_m = 40 \cdot 10^{-3}$ kg · mol^{-1}, $V_1 = 5$ l = $5 \cdot 10^{-3}$ m^3, $V_2 = 10$ l = $10 \cdot 10^{-3}$ m^3, $p = 2 \cdot 10^5$ Pa, $c_V = 0{,}32$ kJ · kg^{-1} · K^{-1}; ΔU = ?

$$\Delta U = mc_V\left(T_2 - T_1\right)$$

Rozdíl teplot určíme ze stavové rovnice:

$$p\left(V_2 - V_1\right) = \frac{m}{M_m} R_m \left(T_2 - T_1\right)$$

Tedy

$$T_2 - T_1 = \frac{p\left(V_2 - V_1\right) M_m}{m R_m}.$$

Po dosazení do vztahu pro přírůstek vnitřní energie dostaneme

$$\Delta U = \frac{p\left(V_2 - V_1\right) c_V M_m}{R_m} = 1{,}5 \text{ kJ}.$$

3.3. / 106

Jaká je teplota chladiče parního stroje, je-li při teplotě páry 200 °C jeho účinnost 21 %?

$\eta = 0{,}21$, $t_1 = 200$ °C, tedy $T_1 = 473$ K; $t_2 = ?$

Pro maximální účinnost parního stroje platí vztah

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

kde T_1 je termodynamická teplota ohřívače, T_2 je termodynamická teplota chladiče. Odtud

$$\eta T_1 = T_1 - T_2$$

a termodynamická teplota chladiče

$$T_2 = T_1(1-\eta) = 374\ \text{K, tedy } t_2 = 101\ °\text{C}.$$

3.3./ 108

Carnotův tepelný stroj, jehož ohřívač má teplotu 127 °C, nabere při každém cyklu teplo 20 kJ a odevzdá chladiči teplo 16 kJ. Určete teplotu chladiče.

$t_1 = 127$ °C, $T_1 = 400$ K, $Q_1 = 20$ kJ, $Q_2 = 16$ kJ; $t_2 = ?$

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = \frac{Q_2}{Q_1}$$

$$T_2 = T_1 \frac{Q_2}{Q_1} = 320\ \text{K}$$

$$t_2 = 47\ °\text{C}$$